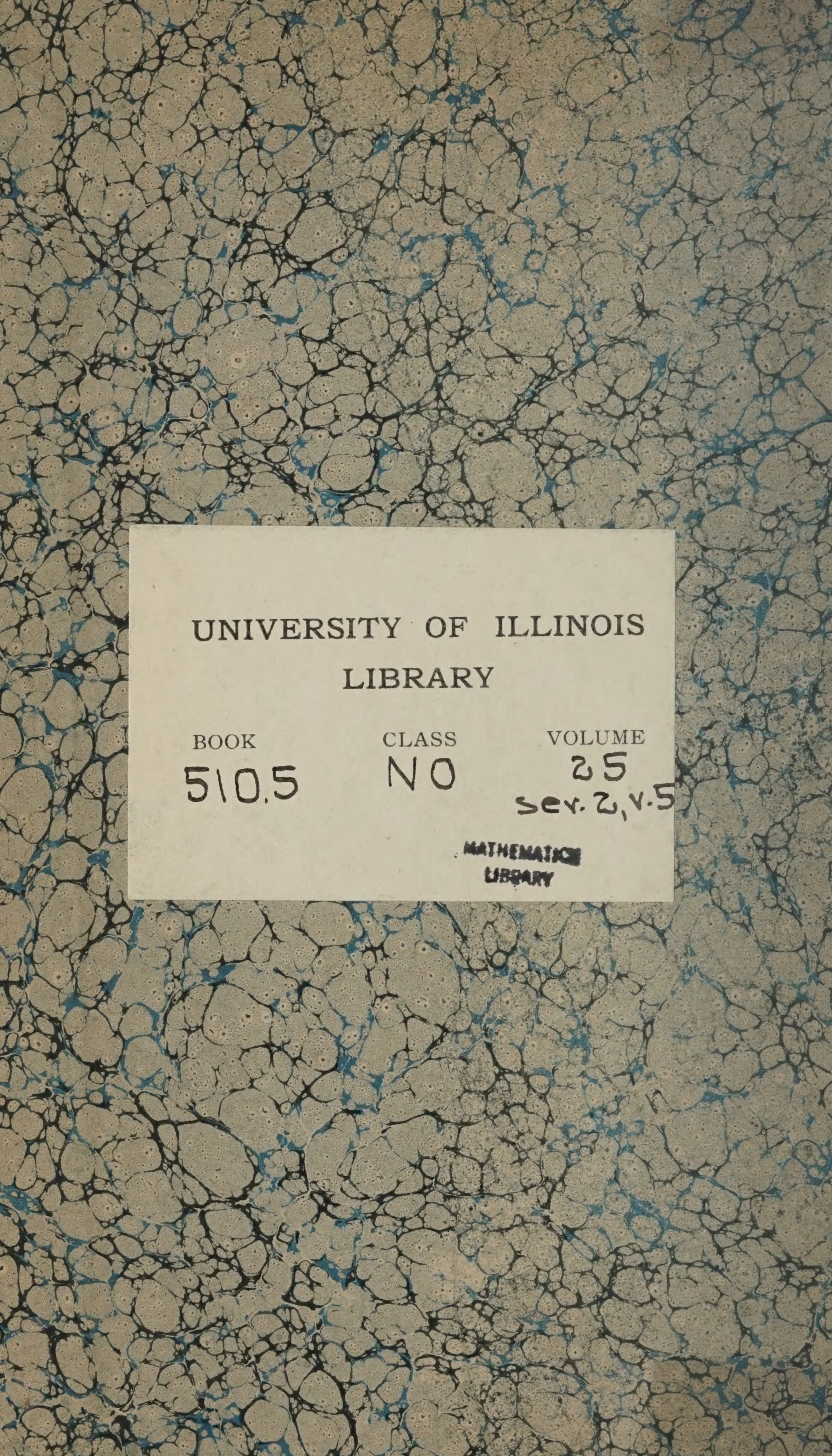



UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
BOOK
510.5
CLASS
NO
VOLUME
25
ser. 2, v.5
MATHEMATICS
LIBRARY



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1866.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

PROUHET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME CINQUIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1866.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

des coefficients des variables dans les équations des courbes et des surfaces du second ordre (*);

PAR M. H. FAURE,

Capitaine d'artillerie.

I. Considérons la conique

$$A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{12}\alpha\beta + 2A_{13}\alpha\gamma + 2A_{23}\beta\gamma = 0$$

rapportée au triangle de référence ABC. Si l'on désigne par c_1, c_2 les points d'intersection de la conique avec le côté AB, les droites cc_1, cc_2 seront données par l'équation

$$A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + 2A_{12}\alpha\beta = 0,$$

de sorte que si $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ sont les deux racines de cette équation, on a, en désignant par a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC,

$$\frac{\alpha_1 . \alpha_2}{\beta_1 . \beta_2} = \frac{A_{22}}{A_{11}} = \frac{Bc_1 . Bc_2}{Ac_1 . Ac_2} . \frac{b^2}{a^2},$$

(*) Les notations seront les mêmes que dans notre Mémoire sur les coordonnées trilinéaires (2e série, t. II, p. 289).

puis

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\left(\frac{Bc_1}{Ac_1}+\frac{Bc_2}{Ac_2}\right)\frac{b}{a}=-\frac{2A_{12}}{A_{11}},$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\left(\frac{Ac_1}{Bc_1}+\frac{Ac_2}{Bc_2}\right)\frac{a}{b}=-\frac{2A_{12}}{A_{22}}.$$

Ces deux dernières relations donnent, en les multipliant,

$$\frac{4A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}=\frac{Ac_1.Bc_2}{Ac_2.Bc_1}+\frac{Ac_2.Bc_1}{Ac_1.Bc_2}+2,$$

d'où

$$\frac{4A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}-4=\frac{(Ac_1.Bc_2-Ac_2.Bc_1)^2}{Ac_1.Ac_2.Bc_1.Bc_2};$$

mais les quatre points A, c_1, c_2, B donnent

$$AB.c_1c_2=Ac_1.Bc_2-Ac_2.Bc_1;$$

on a donc, en désignant par c' la longueur $c_1\,c_2$,

$$A_{12}^2=A_{11}A_{22}\left(1+\frac{c^2.c'^2}{4Ac_1.Ac_2.Bc_1.Bc_2}\right).$$

On sait que, si par un point A on mène une droite arbitraire AB, rencontrant la conique aux points c_1, c_2, le rapport du produit $Ac_1.Ac_2$ au carré du demi-diamètre C parallèle à la droite est constant. Désignons ce rapport par π_a pour le point A, par π_b, π_c pour les deux autres sommets B et C. Nous aurons

$$\frac{A_{22}}{A_{11}}=\frac{b^2\pi_b}{a^2\pi_a},\qquad A_{12}^2=A_{11}A_{22}\left(1+\frac{c^2c'^2}{4\pi_a\pi_bC^4}\right),$$

de sorte que l'équation de la conique s'écrit sous la forme

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2+2\sum ab\,\alpha\beta\left(\pi_a\pi_b+\frac{c^2.c'^2}{4C^4}\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

Les expressions sous le signe $\sum$ donnent chacune deux autres termes par une simple permutation. Les quantités a', b' seraient les cordes de la conique déterminées par les côtés a, b du triangle de référence ; A, B les demi-diamètres parallèles à ces mêmes côtés.

La forme sous laquelle se présente l'équation de la conique permet d'écrire immédiatement l'équation d'une conique circonscrite, conjuguée ou inscrite au triangle de référence.

Si la conique doit être circonscrite, on a

$$\pi_a = \pi_b = \pi_c = 0;$$

l'équation est donc, en remarquant que $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$,

$$\frac{c\alpha\beta}{C^2} + \frac{b\alpha\gamma}{B^2} + \frac{a\beta\gamma}{A^2} = 0.$$

Si la conique est inscrite, on a

$$a' = b' = c' = 0;$$

donc son équation peut s'écrire

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2 + 2\sum ab\alpha\beta\pi_a^{\frac{1}{2}}\pi_b^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Si la conique est conjuguée, on voit aisément que

$$\pi_a\pi_b + \frac{c^2c'^2}{4C^4} = 0,$$

car cette condition signifie que les points A, B sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection c_1, c_2 de la droite AB avec la conique. En effet, dans ce cas, on a

$$AB.c_1c_2 = -2Ac_2.Bc_1, \quad AB.c_1c_2 = Ac_1.Bc_2.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 42.)

On a donc

$$\overline{AB}^2 . \overline{c_1c_2}^2 + 4Ac_1 . Ac_2 . Bc_1 . Bc_2 = 0.$$

L'équation de la conique conjuguée est donc

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2 = 0.$$

II. Au moyen d'un calcul analogue au précédent, l'équation de la surface du second ordre, rapportée au tétraèdre de référence ABCD, se met sous la forme

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2 + 2\sum ab\alpha\beta\left(\pi_a\pi_b + \frac{l^2l'^2}{4L^4}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dans cette équation, a, b, c, d sont les aires des faces opposées aux sommets de même nom; l est la longueur de l'arête ab; l' la partie de cette arête comprise dans la surface, et L le demi-diamètre parallèle à l'arête l. Les quantités π_a, π_b,... sont, comme ci-dessus, les rapports constants que l'on obtient en divisant le produit des segments déterminés sur une droite issue des points A ou B par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.

Les distances d'un point de la surface aux faces respectives a, b, c, d étant désignées par α, β, δ, γ, une simple permutation de lettres suffira pour écrire tous les termes de l'équation.

Surface circonscrite au tétraèdre de référence. — Si la surface du second ordre passe par les sommets du tétraèdre ABCD, on a

$$\pi_a = \pi_b = \pi_c = \pi_d = 0;$$

comme, de plus, $l = l'$, l'équation est

$$\sum \frac{a . b . l^2}{L^2} \alpha\beta = 0.$$

La sphère circonscrite aurait pour équation

$$\sum a.b.l^2\alpha\beta = 0.$$

Surface tangente aux arêtes du tétraèdre de référence. — Si la surface touche les arêtes du tétraèdre, les cordes l' sont nulles; l'équation est donc

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2 + 2\sum ab\,\alpha.\beta\pi_a^{\frac{1}{2}}\pi_b^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Surface conjuguée au tétraèdre. — Cette équation est évidemment

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2.$$

Remarque. — On peut également donner une interprétation géométrique aux coefficients d'une courbe ou d'une surface du second ordre, en supposant que les variables soient les distances des sommets du triangle de référence à une tangente, ou les distances des sommets du tétraèdre de référence à un plan tangent.

III. Désignons par r, r' les points d'intersection d'une transversale issue d'un point R avec une courbe ou surface du second ordre, par ρ le demi-diamètre parallèle à la droite, nous dirons que le rapport $\frac{Rr.Rr'}{\rho^2} = \pi_r$ est la *caractéristique* du point R. Cette caractéristique est positive pour un point situé en dehors de la courbe ou de la surface, négative dans le cas contraire.

Si l'on désigne par δ la distance du point R, et par δ' la distance du centre à la polaire ou au plan polaire du point R, on a aussi

$$\pi_r = -\frac{\delta}{\delta'}.$$

L'interprétation analytique de la caractéristique d'un point est très-facile. Soit F = o l'équation d'une courbe du second ordre; représentons par $\Delta = 0$ la condition qui exprime que la courbe se réduit au système de deux droites, et par P = o la condition qui exprime que le centre de la courbe est à l'infini, on aura

$$\pi_r = - F \frac{P}{\Delta},$$

les variables, dans la fonction F, étant remplacées par les coordonnées du point R.

Si F est une surface du second ordre, $\Delta = 0$ est la condition qui exprime que la surface représente un cône, P = o est toujours la condition qui indique que le centre est à l'infini.

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME DE GAUSS RELATIF AUX SÉRIES;

Par M. Eugène ROUCHÉ.

Une série à termes positifs est convergente, lorsque le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

d'un terme au précédent reste, à partir d'un certain rang, inférieur à un nombre fixe moindre que l'unité; elle est divergente si ce rapport reste, à partir d'un certain rang, supérieur à l'unité. Mais on ne peut rien affirmer lorsque le rapport considéré, ayant l'unité pour limite, ne finit pas par rester toujours au-dessus de sa limite.

Gauss a donné pour lever ce doute une règle très-simple relative au cas où le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

s'exprime par une fraction rationnelle de n. Ce cas, très-fréquent dans la pratique, n'est pas si particulier qu'on le croirait à première vue, si l'on oubliait de remarquer qu'il n'est nullement question ici des valeurs de u_n et de u_{n+1}, mais seulement de leur rapport.

Puisque ce rapport a, par hypothèse, l'unité pour limite, le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle qui l'exprime doivent être des polynômes ayant même degré et même premier terme; et dès lors, en divisant haut et bas par le coefficient de ce premier terme, on voit que le rapport considéré doit être de la forme

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

λ étant entier et positif.

Cela posé, voici à quoi se réduit, en dernière analyse, le théorème de Gauss :

Pour qu'une série U, *telle que le rapport d'un terme au précédent a la forme* (1), *soit convergente, il faut et il suffit que la différence* $A - a$ *soit plus grande que l'unité.*

En raison de sa simplicité et de son utilité pratique, cette règle devrait figurer dans les Éléments. Mais la démonstration de Gauss, bien qu'elle ne repose que sur des principes faciles (*voyez* le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand), offre une certaine longueur qui explique peut-être pourquoi ce théorème n'est pas plus

répandu. Voici une démonstration très-simple que quelques collègues m'ont engagé à publier.

I.

Commençons par établir un lemme, qui n'est au fond qu'un cas particulier du théorème général :

p étant un nombre fixe, entier et positif, la série V, *telle, que le rapport d'un terme au précédent s'exprime par la formule*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n-p-x}{n-p+1}, \qquad (2)$$

est convergente lorsque x est positif, et divergente lorsque x est nul ou négatif.

En effet :

D'abord, pour $x = 0$, la série, ne différant pas de la série harmonique, est divergente

Supposons donc x différent de zéro. La relation (2) donne

$$xv_n = (n-p)\,v_n - (n+1-p)\,v_{n+1}.$$

En changeant successivement n en $n-1$, $n-2$,..., p, ajoutant et désignant par S_n la somme

$$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n,$$

on trouve

$$x\,.\,S_n = -(n+1-p)\,v_{n+1},$$

ou, en exprimant v_{n+1} en fonction de v_p à l'aide de la relation (2),

$$x\,.\,S_n = -(n+1-p)\,v_p\,\frac{(-x)(1-x)(2-x)\ldots(n-p-x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-p+1)},$$

d'où

$$S_n = v_p\,(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n-p}\right).$$

Or, à mesure que n croît de plus en plus, cette somme

tend évidemment vers zéro lorsque x est positif et croît indéfiniment lorsque x est négatif. Donc, etc.

II.

Cela posé, pour démontrer la règle de Gauss, il nous suffira de comparer les séries U et V, à l'aide de ce théorème bien connu :

Si une série V *est convergente et qu'on ait, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série U *sera convergente; et si, la série* V *étant divergente, on a, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série U *sera divergente.*

Considérons donc le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} : \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^{\lambda+1} + (a - p + 1)\,n^{\lambda} + (b - pa + a)\,n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + (A - p - x)\,n^{\lambda} + (B - pA - Ax)\,n^{\lambda-1} + \ldots}$$

ou

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{u_{n+1}}{u_n} : \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &\quad = 1 - \frac{(A - a - 1 - x)\,n^{\lambda} + [B - b - a + Ax - p(A - a)\,n]^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Désignons la dernière fraction par R et distinguons

trois cas, suivant que la quantité

$$A - a - 1$$

est positive, négative ou nulle.

Dans le premier cas, laissons arbitraire le nombre entier et positif p, et prenons pour x un nombre positif inférieur à

$$A - a - 1.$$

A partir d'une certaine valeur de n, on aura alors évidemment $R > 0$, le rapport (3) sera donc moindre que 1; et comme, x étant positif, la série V est convergente, la série U le sera aussi.

Dans le second cas, laissons encore p arbitraire et prenons x égal à zéro. A partir d'une certaine valeur de n, on aura alors $R < 0$; le rapport (3) sera donc plus grand que 1; et comme, x étant nul, la série V est divergente, la série U le sera aussi.

Enfin, dans le dernier cas, prenons x égal à zéro, nous aurons

$$R = \frac{(B - b - a - p)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + \ldots}.$$

Si donc nous prenons pour p un nombre entier et positif supérieur à

$$B - b - a,$$

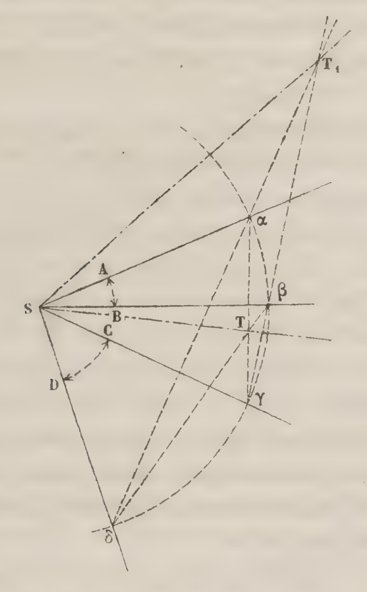
nous aurons, à partir d'une certaine valeur de n, $R < 0$; le rapport (3) sera donc supérieur à 1; et comme, x étant nul, la série V est divergente, la série U le sera aussi.

PLANS TANGENTS COMMUNS A DEUX CONES DE RÉVOLUTION AYANT MÊME SOMMET;

Par M. A. GODART.

On trouve dans Hachette une solution de ce problème, généralement reproduite dans les Traités de Géométrie descriptive. Nous en proposons une nouvelle qui conduit à un tracé plus simple.

Prenons pour plan horizontal le plan qui contient les



axes des deux cônes et qui coupe le premier suivant les génératrices SA, SB, et le second suivant les génératrices SC, SD.

Décrivons du point S comme centre une circonférence de rayon arbitraire $\alpha\beta\gamma\delta$.

Les deux lignes $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ se coupent en un point T qui appartient à la trace horizontale d'un couple de plans tangents communs. La ligne ST_1 qui passe par le point de rencontre des lignes $\gamma\beta$, $\delta\alpha$ est la trace horizontale du second couple de plans tangents communs.

Pour le démontrer, imaginons la sphère inscrite dans le cône ASB, qui touche la génératrice SA en α, et la génératrice SB en β.

Concevons de même la sphère inscrite dans le cône CSD qui touche la génératrice SC en γ et la génératrice SD en δ.

Un plan tangent commun aux deux cônes est également tangent à chacune de ces sphères, et contient par conséquent le sommet d'un cône qui serait circonscrit à la fois à ces deux sphères.

Mais ce sommet est un centre de similitude de ces deux sphères, ou bien le centre de similitude de leurs deux cercles d'intersection avec le plan horizontal.

Remarquons maintenant que la circonférence (S) est orthogonale aux deux cercles dont nous venons de parler. Et l'on sait que si l'on mène un cercle orthogonal à la fois à deux cercles, les lignes qui joignent les points d'intersection deux à deux passent par les centres de similitude (*). Donc le point T, centre de similitude interne des deux sphères considérées, appartient à un couple de plans tangents communs aux deux cônes. Le point T_1, centre de similitude externe, appartient aux deux autres plans tangents communs.

(*) Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I.

NOTE SUR LE NOMBRE DES CONIQUES QUI TOUCHENT EN CINQ POINTS UNE COURBE DU CINQUIÈME DEGRÉ;

PAR M. THÉODORE BERNER,
Docteur en Philosophie à Berlin.

J'avais imaginé, il y a quelque temps, une méthode inductive pour évaluer le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données; et comme je suis parvenu, sans avoir connaissance des belles recherches de M. Chasles, à des résultats conformes à ceux qui sont indiqués par ce grand géomètre dans les *Comptes rendus*, je veux exposer en peu de mots les principes de cette méthode.

J'ai montré (*) qu'étant donnée une courbe quelconque A du $n^{ième}$ degré, on peut toujours supposer qu'elle soit infiniment voisine à n droites quelconques D, sans nuire à sa généralité, c'est-à-dire qu'on peut prendre la courbe telle, qu'elle soit infiniment prête à être réduite à n droites D. J'ai montré de plus que cette courbe A peut être considérée comme ligne droite dans toute l'étendue d'une des droites D, excepté les points d'intersection avec les autres droites. Mais, dans tous ces points que je veux appeler *points doubles*, la courbe A se confond avec des hyperboles (réelles ou imaginaires).

Une courbe quelconque B, touchant une des droites D, doit être considérée comme touchant la courbe A. Une courbe B, passant par un point double des droites D, re-

(*) *De transformatione secundi ordinis, etc.* « Sur la transformation géométrique du second ordre, » § 8. Berlin, Calvary et C°.

présente *deux* courbes touchant la courbe A dans les *deux* branches hyperboliques. Si la courbe B passe par deux points doubles, elle représente quatre courbes dont chacune touche deux fois la courbe A, et ainsi de suite. Si la courbe B passe par n points doubles, on peut la considérer comme étant composée de 2^n courbes coïncidantes qui deviendront distinctes en faisant disparaître les points doubles et y substituant les hyperboles infiniment voisines.

J'ai indiqué dans le Mémoire cité de quelle manière on peut employer ces remarques à une grande partie des questions traitées récemment par M. Chasles. Dans tous les cas où la conique passe par des points donnés ou touche des courbes données *une seule fois* chacune, ma méthode n'offre pas de difficultés et les résultats sont en parfaite harmonie avec ceux de M. Chasles. Au contraire, si les conditions sont telles, qu'une seule des courbes données doit être touchée par la conique *dans plusieurs points*, la méthode de M. Chasles n'est guère applicable (*), et je ne peux trouver par la mienne qu'une limite inférieure du nombre cherché. Aussi, en traitant des coniques touchant en cinq points une courbe du cinquième ordre, je me propose seulement d'établir que le nombre des solutions données autrefois par M. de Jonquières dans ce journal (t. III, p. 222) est trop petit. Je n'énumérerai que les coniques dont l'existence n'est pas douteuse.

Supposez la courbe du cinquième degré dissolue en cinq droites. Cinq droites forment 12 pentagones simples. On peut circonscrire à chacun d'eux *une* conique qui, passant par cinq points doubles, doit être comptée 2^5 fois.

(*) Elle est applicable avec quelques modifications. (*Voir*, sur les conditions multiples, *Comptes rendus* : CHASLES, 22 août 1864; CREMONA, 7 novembre 1864, et tout récemment ZEUTHEN, 22 janvier 1866.) P.

Ainsi l'on a

$$1 . 12 . 2^5 \text{ coniques touchant la courbe dans cinq points.}$$

Otez une des cinq droites : cela se peut de 5 manières différentes. Les quatre droites qui vous restent constituent 3 quadrilatères simples. On peut circonscrire à chacun d'eux deux coniques qui touchent la droite supprimée. Ces coniques, passant par quatre points doubles, doivent être comptées 2^4 fois.

On aura donc

$$5 . 3 . 2 . 2^4 \text{ coniques.}$$

Maintenant ôtez deux droites : cela est possible de 10 manières différentes. Les trois droites qui restent constituent un triangle auquel on peut circonscrire quatre coniques touchant les deux droites réservées. Chacune de ces coniques, passant par trois points, sera comptée 2^3 fois.

Il en résulte

$$\frac{5 . 4}{1 . 2} . 4 . 2^3 \text{ coniques.}$$

En ôtant trois ou quatre droites, il ne reste aucun polygone raisonnable ; mais à toutes les droites on peut inscrire une seule conique. En ajoutant tous les nombres trouvés, il vient

$$1 . 12 . 2^5 + 5 . 3 . 2 . 2^4 + \frac{5 . 4}{1 . 2} . 4 . 2^3 + 1 = 1185.$$

Ce nombre étant trouvé d'une manière *géométrique*, on peut le considérer comme limite *inférieure* du nombre cherché. M. de Jonquières ne trouve que 1135 coniques. Aussi la formule dont il déduit ce résultat ne saurait être juste (*).

Note du Rédacteur. — La méthode qui précède a déjà été employée par

(*) Cette formule, obtenue au moyen du procédé indiqué par M. Berner, présente effectivement une faute dans le dernier coefficient qui devrait être + 15 au lieu de — 35. Cette faute a été corrigée dans l'*errata* du dernier volume. P.

plusieurs géomètres pour trouver le nombre des solutions de certains problèmes. Malheureusement elle ne donne qu'une limite inférieure du nombre cherché et n'offre *absolument* aucun moyen de reconnaître si le nombre trouvé est exact ou trop petit. M. Chasles ne procède point ainsi: au lieu de demander à un cas très-particulier la solution d'un problème très-général, il remplace les conditions géométriques du problème par d'autres équivalentes, mais plus simples, et par une suite de réductions arrive aux problèmes les plus élémentaires. Tout l'intérêt de son travail est dans cette marche rigoureuse, neuve et féconde. Car il importe peu au fond qu'il y ait 3264 coniques tangentes à 5 coniques données ou qu'il y en ait 7776; mais il importe beaucoup, comme le dit Leibniz, de perfectionner l'art d'inventer et de trouver par raison tout ce qui se peut trouver par raison.

L'admirable méthode de M. Chasles et ses travaux antérieurs lui ont valu une distinction très-rare. La Société Royale de Londres lui a décerné la médaille de Copley. Nous publierons des extraits du Rapport du général Sabine, président de la Société Royale. P.

CORRESPONDANCE.

M. Y., de Bruxelles, nous écrit au sujet d'un concours qui a eu lieu en Belgique, et dont nous avons parlé dans notre dernier volume. Nous n'insérons pas cette communication, parce que son auteur ne nous fait connaître ni son nom, ni son adresse. Quand nous admettons un article sans signature, nous en prenons pour ainsi dire la responsabilité devant nos lecteurs : il est donc bien juste que nous sachions à qui nous avons affaire. P.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE EN 1865.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE,

Par M. Paul MOËSSARD.

On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec cette parabole quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

Je prends pour origine des coordonnées le foyer de la parabole fixe; pour axe des x l'axe de cette parabole, et pour axe des y une perpendiculaire élevée au foyer.

Soit $2p$ le paramètre de la parabole; son équation sera

$$y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

L'équation d'un cercle ayant pour centre le point dont les coordonnées sont a et b, et passant à l'origine, est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par l'intersection des deux courbes est donc

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \lambda\left[y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)\right] = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2(1 + \lambda) - 2(a + p\lambda)x - 2by - p^2\lambda = 0.$$

Je vais exprimer que cette équation représente un système de deux droites qui seront alors les sécantes communes aux deux courbes. Pour cela j'exprime que le centre de cette conique est sur la courbe. J'écris les équations du centre, et ce que devient l'équation de la conique quand on tient compte des équations du centre ; j'ai ainsi

$$x - a - p\lambda = 0,$$
$$y(1 + \lambda) - b = 0,$$
$$x(a + p\lambda) + by + \lambda p^2 = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre ces équations; en remplaçant x et y par leurs valeurs dans la troisième, j'ai

$$(a + p\lambda)^2(1 + \lambda) + b^2 + \lambda p^2(1 + \lambda) = 0,$$

équation dont les trois racines me donneront des systèmes de sécantes communes.

Cherchons la condition pour que les racines de cette équation soient toutes trois réelles.

Je l'ordonne :

$$p^2\lambda^3 + 2p(p + a)\lambda^2 + (p + a)^2\lambda + a^2 + b^2 = 0.$$

Je fais maintenant disparaître le terme en λ^2. Pour cela je diminue toutes les racines de cette équation du tiers de la somme de ses racines, c'est-à-dire de la quantité toujours réelle $-\frac{2p(p+a)}{3p^2}$ ou $-\frac{2(p+a)}{3p}$.

Je remplace donc λ par $\mu - \frac{2(p+a)}{3p}$.

Soit $f(\lambda) = 0$ la première équation. J'y fais $\lambda = \mu + h$,

et j'ai

$$f(\mu + h) = f(h) + \mu f'(h) + \mu^2 \frac{f''(h)}{1.2.} + \mu^3 \frac{f'''(h)}{1.2.3}.$$

Je calcule ces différents coefficients :

$$f(h) = -\frac{8(p+a)^3}{27p} + \frac{8(p+a)^3}{9p} - \frac{2(p+a)^3}{3p} + a^2 + b^2$$

$$= \frac{-2(p+a)^3 + 27p(a^2+b^2)}{27p},$$

$$f'(h) = -\frac{(p+a)^2}{3},$$

$$f''(h) = 0,$$

et

$$f'''(h) = +6p^2.$$

L'équation en μ sera donc

$$p^2\mu^3 - \frac{(p+a)^2}{3}\mu - \frac{2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)}{27p} = 0.$$

Formons la condition de réalité des racines de cette équation ; c'est

$$-4 . \frac{(p+a)^6}{27 . p^6} + 27 \frac{[2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)]^2}{27^2 p^6} < 0,$$

ou

$$-4(p+a)^6 + [2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)]^2 < 0,$$

ou bien encore

$$[4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)][-27p(a^2+b^2)] < 0.$$

Le second facteur est toujours négatif (*); donc la

(*) Plusieurs élèves ont remarqué qu'en égalant ce facteur à zéro, on obtient le foyer qui peut être considéré comme faisant *en quelque sorte* partie du lieu, en regardant ce point comme un cercle de rayon nul et doublement tangent à la parabole. Mais la suppression de ce facteur commun ne peut avoir ici aucune importance. P.

condition se réduit à

(1) $$4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2) > 0.$$

Si l'on avait

$$4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2) = 0,$$

la parabole et le cercle seraient tangents, puisque, l'équation en λ ayant deux racines égales, deux des systèmes de sécantes communes se réduiraient à un seul. Si donc nous construisons la courbe

$$4(p+x)^3 - 27p(x^2+y^2) = 0,$$

elle séparera les deux régions du plan où doit se trouver le centre pour que les racines de l'équation en λ soient toutes réelles, ou qu'il n'y en ait qu'une de réelle.

Je résous l'équation par rapport à y :

$$y^2 = \frac{4(p+x)^3 - 27px^2}{27p} = \frac{4x^3 - 15px^2 + 12p^2x + 4p^3}{27p}.$$

Cherchons à décomposer le numérateur en facteurs du premier degré, si faire se peut.

Si j'égale à zéro la dérivée de ce numérateur,

$$2x^2 - 5px + 2p^2 = 0,$$

les racines de cette équation sont $2p$ et $\frac{p}{2}$.

Or, $2p$ annule le numérateur de la valeur de y^2; donc $x - 2p$ est facteur double de ce numérateur, et, en effectuant la division, on trouve comme troisième facteur $4x + p$.

Donc

$$y^2 = \frac{(4x+p)(x-2p)^2}{27p}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

Pour x inférieur à $-\frac{p}{4}$, y^2 est négatif et y imaginaire; pour $x = -\frac{p}{4}$, $y = 0$, et en ce point (C) la tangente est parallèle à l'axe des y.

y augmente, et, pour $x = 0$, $y^2 = \frac{4}{27}p^2$, et comme $OA = p$, je pose $OB = \frac{2\,OA}{3\sqrt{3}}$.

Puis, pour $x = 2p$, $y = 0$, et la courbe a un point double; soit $OD = 2p$.

Les (coefficients angulaires des) tangentes en ce point sont

$$\pm \lim \frac{y}{x - 2p} \quad \text{pour} \quad x = 2p,$$

c'est-à-dire $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Puis, x devenant infini, y devient aussi infini.

Comme, dans l'équation (de la courbe), les termes du plus haut degré se réduisent à x^3, les branches infinies tendent à devenir parallèles à l'axe des y. Du reste, leurs asymptotes sont transportées à l'infini; ce sont des branches paraboliques.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés de cette courbe et des régions qu'elle sépare.

Nous savons que quand le centre du cercle sera sur cette courbe, le cercle sera tangent à la parabole. Pour le point C, il est manifeste que le cercle n'aura avec la courbe que deux points d'intersection réunis en un seul; donc tous les autres points des branches CD de la courbe seront centres de cercles tangents à la parabole et ne la coupant pas d'ailleurs. En D le cercle sera bitangent à la parabole, et, pour tous les autres points des branches infinies partant du point D, les cercles seront tangents

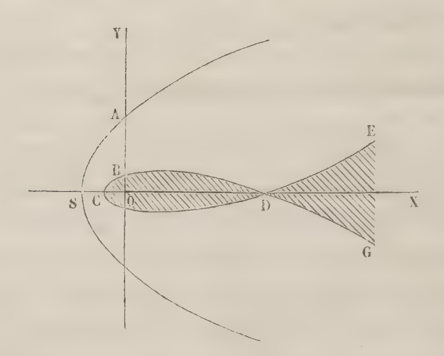
à la parabole et la couperont en deux autres points distincts.

Les points de cette courbe sont donc tels, que la longueur d'une normale menée de l'un d'eux à la parabole est égale à la distance de ce point au foyer, et en appelant la longueur de cette normale la distance du point à la parabole, cette courbe est le lieu des points également distants d'une parabole et de son foyer.

Voyons maintenant pour quelles parties du plan les racines de l'équation en λ seront réelles toutes trois.

Pour le point O, $x = 0$, $y = 0$, la condition (1) est satisfaite; donc, pour ce point et pour tous ceux qui sont dans la région hachée, les trois racines de l'équation en λ sont réelles. Pour tous les points du plan compris dans cette région, les cercles auront donc quatre points réels ou quatre points imaginaires communs avec la courbe, et pour tous les points situés en dehors, les cercles auront seulement deux points réels communs avec la parabole.

Distinguons maintenant les parties de cette région qui correspondent à quatre points réels ou à quatre points imaginaires communs. Pour le point O, le cercle en question n'a aucun point réel commun avec la parabole; il en



est donc de même pour tous les points compris dans la

boucle CD. Au contraire, les points compris entre les deux branches infinies donneront des cercles ayant quatre points réels communs avec la parabole.

Donc, en résumé :

1° Pour les points compris dans la boucle CD, les cercles ne rencontreront pas la parabole.

2° Pour les points situés sur la boucle même, les cercles seront tangents et ne la couperont pas autrement.

3° Pour tous les points compris dans l'espace laissé en blanc, les cercles ne rencontreront la parabole qu'en deux points.

4° Pour les points situés sur les branches de courbe ED, DG, les cercles seront tangents à la parabole et la couperont en deux autres points.

5° Enfin, pour les points compris entre ces deux branches, dans l'angle curviligne EDG, les cercles couperont les paraboles en quatre points.

Note du Rédacteur. — Cette copie a mérité la note 19. Plusieurs autres élèves, sans avoir aussi bien fait dans l'ensemble, ont noté plusieurs choses dignes de remarque. Quelques-uns ont employé les coordonnées polaires, qui conduisaient plus immédiatement à une équation simple. Quant aux propriétés de la courbe, partie vague et mal limitée de la question, on en trouvera quelques-unes dans le travail suivant. P.

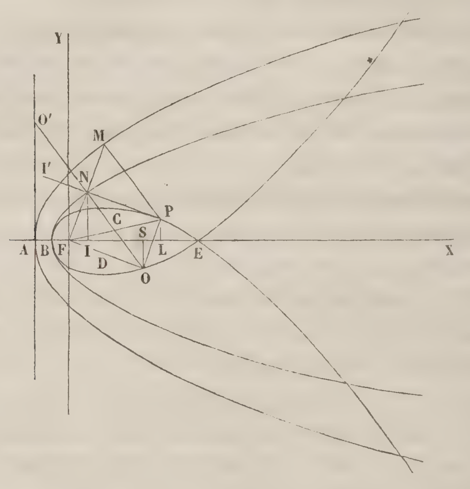
PROPRIÉTÉS DE LA COURBE PRÉCÉDENTE;

Par MM. BARBIER et LUCAS,
Astronomes de l'Observatoire de Paris (*).

1. La perpendiculaire NP au milieu du rayon vecteur de la parabole touche la courbe au point P; en effet,

(*) Nous supprimons les deux premières parties de ce travail qui font double emploi avec l'article précédent.

dans le mouvement de l'angle droit FNP, le centre instantané de rotation est le point O, intersection de la perpendiculaire FO élevée sur FM, et de la normale NO au lieu du point N ; la similitude évidente des lieux du point N et du point M fait voir que NO est parallèle à MP;



FO est égal à NP, OP est perpendiculaire sur NP, donc le point P est le point où NP touche son enveloppe.

La parabole BN est donc la podaire de la courbe, le pôle étant au foyer; la podaire de la parabole est sa tangente au sommet; on peut donc dire que la podaire de la podaire de la courbe est une ligne droite.

2. Le rayon de lumière FP se réfléchirait sur la courbe dans la direction MP prolongée, c'est-à-dire dans la direction de la normale à la parabole au point N; il résulte de cette remarque que la caustique par réflexion de la courbe est la développée de la parabole. Le point lumineux est au foyer de la parabole.

3. L'ordonnée NI et la droite NP sont également incli-

nées sur la normale NO à la parabole BN. Il résulte de là que la courbe est la caustique par réflexion de la parabole BN pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe de la parabole.

Cette courbe est étudiée à ce titre dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital.

4. Le point O est le milieu du rayon de courbure de la parabole BN au point N.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition connue : Si une courbe réfléchit des rayons parallèles, la projection du milieu du rayon de courbure de cette courbe sur le rayon réfléchi correspondant donne un point de la caustique.

5. Soit L la projection du point P sur l'axe AX et I la projection du point N sur le même axe; on a $BL = 3\,BI$.

Pour démontrer cette proposition, remarquons que si l'on prend sur le prolongement NO′ de la normale à la parabole BN une longueur NO′ égale à la moitié du rayon de courbure au point N, le point O′ est un point de la directrice AO′ de cette parabole.

De l'égalité de NO et de NO′ résulte celle des projections AI et IS de ces deux longueurs; on voit donc que FL est égal à $3\,FI + AF$ ou $3\,FI + 2\,BF$; à ces deux quantités égales il suffit d'ajouter BF pour avoir l'égalité

$$BL = 3\,(FI + BF)$$

qui devient évidemment celle que nous voulions démontrer.

6. L'arc de courbe BP a pour longueur le chemin INP parcouru par le rayon de lumière entre l'axe de la parabole et la caustique.

Cette proposition revient à la suivante : Si l'on prend.

sur le prolongement de PN, $NI' = NI$, le lieu du point I' est une développante de la courbe BP. Il suffit de faire voir que ce lieu de I' est normal à PI'.

Cette dernière proposition peut être démontrée ainsi : Appelons N'I'' une position de NI' infiniment voisine de NI'. L'élément de parabole NN' a des projections égales sur NI et sur NP, on verra facilement d'après cela que la projection de I'' sur NI' doit tomber au point I pour que N'I'' puisse être regardé comme égal à sa projection sur NI'. Donc le lieu de I' est normal à PI'.

7. Les tangentes aux points où l'axe FY rencontre la courbe BP se coupent sous un angle de 60 degrés; nous avons déjà dit que les tangentes au point double se coupent sous le même angle de 60 degrés. Ces propositions sont des cas particuliers de la suivante :

Si l'on mène une droite par le point F, elle coupe la courbe en trois points; les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Cette élégante proposition est elle-même comprise dans le théorème suivant :

Les tangentes à la courbe BP aux extrémités de deux rayons vecteurs font un angle égal aux $\frac{2}{3}$ de l'angle de ces rayons vecteurs.

Plus généralement, les tangentes aux extrémités de deux rayons vecteurs d'une courbe $\rho \cos^p \frac{\omega}{p} = a$ se coupent sous un angle égal à la fraction $\frac{p-1}{p}$ de l'angle de ces rayons vecteurs.

8. La polaire réciproque de la courbe par rapport à une circonférence dont le centre est au foyer F est une cardioïde. Cela résulte de cette proposition connue : La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle

est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de la courbe, le pôle étant le centre du cercle.

9. Si l'on considère toutes les courbes obtenues en faisant varier le paramètre de la parabole, on obtient une série de courbes dont les trajectoires orthogonales sont des courbes égales aux premières. Il en est de même pour les trajectoires coupant chacune des courbes de la série sous un angle constant.

10. Remarquons enfin que la courbe étudiée rentre dans la famille des courbes dont l'équation est $\rho^n = a^n \cos n\omega$. Ces courbes se substituent les unes aux autres par la transformation $\rho' = \rho^n$, $\omega' = n\omega$, et on sait que cette transformation n'altère point les angles; on peut donc déduire la plupart des propriétés précédentes des propriétés correspondantes de la droite, du cercle ou de la parabole, courbes de la famille considérée.

REMARQUES

sur les compositions de Trigonométrie et de Mathématiques faites en 1865 pour l'admission à l'École Polytechnique.

Trigonométrie.

On proposait de calculer les angles d'un triangle dont on donnait les trois côtés. Sur 320 candidats admissibles, 121 ont résolu la question sans faute ou avec une seule faute légère. La moyenne générale des notes a été 14,86 : la moyenne des candidats de Paris, 14,21; de province, 16,07. En somme, le résultat est satisfaisant. Il le serait

encore plus si les élèves prenaient certaines précautions fort simples sans lesquelles le meilleur calculateur peut se tromper. Par exemple, si l'on a fait la somme de plusieurs logarithmes, il faut recommencer immédiatement l'opération dans un ordre inverse. De même, quand on a pris la moitié d'un nombre, il faut doubler le résultat et voir si l'on obtient le nombre proposé. En un mot, chaque opération partielle doit être suivie immédiatement de sa preuve. Une des erreurs les plus fréquentes, et que la preuve ferait connaître et corriger de suite, est celle que l'on commet en prenant la moitié d'un logarithme à caractéristique négative et impaire. Au lieu de prendre la moitié de la caractéristique augmentée de 1, on prend la moitié de cette caractéristique diminuée de 1. On trouve une dernière vérification en ajoutant les trois angles calculés. Il faut que la somme soit 180 degrés, ou n'en diffère que de quelques centièmes de seconde. Une erreur de plusieurs degrés indique que le résultat est fautif : on doit alors repasser son calcul pour voir où peut être la faute, et si on la trouve, la signaler quand même on n'aurait pas le temps de la corriger; cela augmentera la note d'une ou deux unités. Comme l'année dernière, nous répéterons qu'il faut se borner aux calculs demandés. Faire plus, c'est montrer peu de jugement, puisqu'on emploie à un travail, dont il ne sera tenu aucun compte, le temps qui serait beaucoup mieux employé en vérifiant les calculs déjà faits.

Composition de Mathématiques.

Un examen a pour but de faire connaître si les candidats possèdent les théories exigées; par la composition, on s'assure qu'ils savent les appliquer et exposer d'une manière convenable les résultats d'un travail per-

sonnel. Comme il ne s'agit pas de mettre en évidence des organisations exceptionnelles, un problème donné en composition doit être assez simple pour être traité par la grande majorité des candidats, et assez difficile pour être différemment traité par des élèves de forces différentes. La question de cette année satisfaisait à ces deux conditions : nous aurions désiré pourtant que la recherche du lieu géométrique, auquel devait conduire l'énoncé, eût été indiquée tout d'abord.

Voici les résultats du concours :

Moyenne générale	10,20
Moyenne des départements......	11,21
Moyenne de Paris	9,67

Sur les 320 admissibles :

44	ont été notés de.........	15 à 19
80	»	10 à 14
196	» au-dessous de	10

On voit qu'il y a du bon et du médiocre, mais le mauvais domine. Tous les candidats savaient pourtant comment la question devait être traitée et en ont exposé la théorie d'une manière irréprochable, mais ils se sont trompés dans l'exécution des calculs : ce qui montre combien il y a loin de la théorie à l'application. Une chose a surtout frappé le correcteur, c'est que la plupart des élèves calculent pour ainsi dire les yeux fermés, acceptant aveuglément les résultats de leur calcul. Un élève trouvera *par son calcul* que le lieu est une courbe fermée, et il mettra sur sa copie : « Donc le lieu *est une courbe fermée*, » et cependant il suffit de regarder l'énoncé avec un peu d'attention pour voir que la question revient à chercher le lieu des points également éloignés d'une parabole et de son foyer. Le lieu doit donc être illimité.

Mais personne ne fait de ces vérifications si aisées et ne suppose qu'il puisse se tromper en calculant.

Nous dirons du calcul algébrique ce que nous avons dit du calcul numérique. Il ne peut se bien faire que si chaque pas est assuré par quelque vérification. Dans une théorie exposée au tableau, il n'y a rien d'imprévu, et s'il échappe quelque faute, le résultat connu d'avance sert à la découvrir et à la corriger. Il n'en est pas de même dans une question d'application. C'est surtout au commencement que l'on doit faire le plus d'attention et ne pas craindre de répéter deux ou trois fois le même calcul. Plusieurs candidats ont trouvé le moyen de se tromper dans l'équation de la parabole rapportée à son foyer. Il est clair que tout le reste de la composition devait se ressentir de cette première faute, pourtant si facile à éviter.

Les élèves qui ont trouvé l'équation exacte de la courbe n'ont pas toujours su en déduire la forme, tant on est peu exercé sur la construction des courbes d'après leurs équations. Quelques-uns ont commencé la discussion par rechercher si la courbe n'avait pas de points d'inflexion à l'infini ; mais le point placé à égale distance du sommet de la parabole et de son foyer leur a échappé.

La composition de Mathématiques étant une épreuve sérieuse et qui a une grande importance, il convient que les candidats s'y préparent en traitant avec le plus grand soin des questions d'application. On ne devrait étudier aucune théorie un peu importante, sans traiter une question qui s'y rapporte. Malheureusement il n'en est pas ainsi : nous avons vu des élèves intelligents ne point faire les compositions données par leurs professeurs. Ils aiment mieux, disent-ils, repasser leur cours. C'est une mauvaise spéculation dont ils s'aperçoivent quand il n'est plus temps. (E. P.)

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 429 *et* 430

(voir t. XVII, p. 139);

PAR M. BAUQUENNE,
Candidat à l'École Normale.

Par le centre d'un polygone sphérique régulier, on fait passer une circonférence de grand cercle, et l'on projette sur cette circonférence tous les arcs menés du centre aux divers sommets; comment varie la somme des puissances n des tangentes des projections quand varie la direction du grand cercle? Question analogue pour un polygone régulier dans un plan. (VANNSON.)

Soient O le centre d'un polygone, A un quelconque de ses sommets, A′ la projection de ce sommet sur l'arc de grand cercle considéré. En désignant par r le rayon polaire du polygone, le triangle sphérique rectangle AOA′ donne

$$\tan \text{OA}' = \tan r \cos \text{AOA}'.$$

Si N est le nombre des côtés du polygone, $\frac{2\pi}{N}$ est l'angle au pôle. Appelons α l'angle caractéristique du grand cercle choisi, et k un nombre entier inférieur à N, on aura

$$\text{AOA}' = \alpha + k\frac{2\pi}{N}$$

et

$$\tan \text{OA}' = \tan r \cos\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).$$

En désignant par S_n la somme cherchée,

$$S_n = \operatorname{tang}^n r \sum_{k=0}^{k=N-1} \cos^n \left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).$$

On a, d'après une formule connue, si n est pair,

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}\cos^n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right)\\
&\quad = \cos n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{n}{1}\cos(n-2)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots\\
&\qquad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots\\
&\qquad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et si n est impair,

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}\cos^n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right)\\
&\quad = \cos n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{n}{1}\cos(n-2)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right)\\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots\\
&\qquad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).
\end{aligned}$$

Tout revient donc à former des sommes telles que

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} \cos m\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right),$$

m étant un nombre entier quelconque. Les arcs considérés étant en progression arithmétique, il suffit d'appliquer une formule connue, et l'on trouve que le numérateur est nul sans que le dénominateur le soit, toutes les fois que $\frac{m}{N}$ n'est pas entier, ce qui arrive en particulier si m est inférieur à N. La plus grande valeur de m étant n, la somme précédente sera nulle si le degré de la puissance est inférieur au nombre des côtés du polygone.

Donc, si n est impair,

$$S_n = 0,$$

et si n est pair et égal à $2p$,

$$S_{2p} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots 2p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{N \operatorname{tang}^{2p} r}{2^{2p}}.$$

Cette somme est donc constante.

Si l'on avait considéré le polygone dans un plan, on aurait eu

$$OA' = r \cos AOA',$$

et une suite de calculs identiques.

Dans le cas où $p = 1$, la dernière formule se simplifie et donne

$$S_2 = \frac{N}{2} \operatorname{tang}^2 r.$$

C'est la question 429.

Question 590

(voir tome XX, page 141);

Par M. A. S.

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque

inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (FAURE.)

Prenons le premier triangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c pour triangle de référence; une conique quelconque inscrite dans ce triangle aura pour équation

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\alpha\beta = 0.$$

La polaire, par rapport à cette conique, d'un point quelconque α', β', γ' a pour équation

$$(l\alpha - m\beta - n\gamma)\,l\alpha' + (m\beta - n\gamma - l\alpha)\,m\beta' + (n\gamma - l\alpha - m\beta)\,n\gamma' = 0.$$

Les coordonnées du premier point milieu sont

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = \frac{a\sin C}{2}, \quad \gamma' = \frac{a\sin B}{2};$$

celles du second,

$$\beta' = 0, \quad \gamma' = \frac{b\sin A}{2}, \quad \alpha' = \frac{b\sin C}{2};$$

et celles du troisième,

$$\gamma' = 0, \quad \alpha' = \frac{c\sin B}{2}, \quad \beta' = \frac{c\sin A}{2}.$$

En portant ces différentes valeurs dans l'équation générale de la polaire, on obtient

$$(1)\quad (mc + nb)\,l\alpha - (mc - nb)\,m\beta + (mc - nb)\,n\gamma = 0,$$

$$(2)\quad (lc - na)\,l\alpha - (lc + na)\,m\beta - (lc - na)\,n\gamma = 0,$$

$$(3)\quad (lb - ma)\,l\alpha - (lb - ma)\,m\beta - (lb + ma)\,n\gamma = 0.$$

Les distances des trois sommets du triangle de référence

à la droite (1) sont (t. XX, p. 224)

$$l\,\frac{mc+nb}{a},\qquad -m\,\frac{mc-nb}{b},\qquad n\,\frac{mc-nb}{c};$$

à la droite (2),

$$l\,\frac{lb-ma}{a},\qquad -m\,\frac{lb-ma}{b},\qquad -n\,\frac{lb+ma}{c};$$

et à la droite (3),

$$l\,\frac{lc-na}{a},\qquad -m\,\frac{lc+na}{b},\qquad -n\,\frac{lc-na}{c}.$$

S étant l'aire du triangle de référence, S′ celle du triangle formé par les droites (1), (2) et (3), on a (*voir* endroit cité)

$$S' = S\,\frac{P^2}{P_1 P_2 P_3},$$

en posant, conformément à une notation connue,

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lc-na & lc+na & lc-na \\ lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ mc+nb & mc-nb & -mc+nb \end{vmatrix} = P,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ mc+nb & mc-nb & -mc+nb \\ \dfrac{a}{l} & -\dfrac{b}{m} & -\dfrac{c}{n} \end{vmatrix} = P_1,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} mc+nb & mc-nb & -mc+nb \\ lc-na & lc+na & lc-na \\ \dfrac{a}{l} & -\dfrac{b}{m} & -\dfrac{c}{n} \end{vmatrix} = P_2,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lc-na & lc+na & lc-na \\ lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ \dfrac{a}{l} & -\dfrac{b}{m} & -\dfrac{c}{n} \end{vmatrix} = P_3.$$

Ces quatre déterminants se réduisent facilement à

$$P = 8l^2m^2n^2, \quad P_1 = 4l^2mn, \quad P_2 = 4lm^2n, \quad P_3 = 4lmn^2;$$

on en déduit, en portant dans la formule ci-dessus,

$$S' = S,$$

ce qui démontre le théorème et donne la valeur de la constante

---

Question 649

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 189) ;

PAR M. CHARLES CAYLA,
Maître d'études au collége Rollin.

On donne une surface conique du second degré sur laquelle on peut placer un trièdre trirectangle; on sait qu'on peut alors en placer une infinité; par les trois arêtes de l'un de ces trièdres, on mène des plans normaux à cette surface; ces trois plans se coupent suivant une même droite, dont on demande le lieu, lorsqu'on déplace le trièdre sur la surface conique. (MANNHEIM.)

Je suppose d'abord la surface conique rapportée à l'un des trièdres trirectangles que l'on peut placer sur sa surface. Son équation sera

$$By'z' + B'z'x' + B''x'y' = 0.$$

Le plan tangent à la surface suivant l'axe des x a pour équation

$$\frac{y'}{B'} + \frac{z'}{B''} = 0.$$

L'équation du plan normal correspondant est

$$B'y' - B''z' = 0.$$

Par symétrie, on aura pour les équations des deux autres plans normaux

$$B''z' - Bx' = 0,$$
$$Bx' - B'y' = 0.$$

Ces trois plans normaux passent par la droite

$$Bx' = B'y' = B''z'.$$

Rapportons maintenant la surface à ses axes. Son équation prendra la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0.$$

On a pour tous les points de l'espace les relations connues

$$By'z' + B'z'x' + B''x'y' = Sx^2 + S'y^2 + S''z^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Or nous pouvons écrire les équations de la droite

$$\frac{x'}{\frac{1}{B}} = \frac{y'}{\frac{1}{B'}} = \frac{z'}{\frac{1}{B''}} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B''^2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{By'z' + B'z'x' + B''x'y'}}{\sqrt{\frac{B}{B'B''} + \frac{B'}{B''B} + \frac{B''}{BB'}}}.$$

Élevant au carré les deux derniers rapports et tenant compte des relations précédentes, on a l'équation du lieu

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{B'^2B''^2 + B''^2B'^2 + B^2B''^2} = \frac{Sx^2 + S'y^2 + S''z^2}{BB'B''(B^2 + B'^2 + B''^2)}.$$

Posant

$$\frac{BB'B''(B^2 + B'^2 + B''^2)}{B'^2B''^2 + B''^2B'^2 + B^2B'^2} = k,$$

l'équation devient

$$(k - S)x^2 + (k - S')y^2 + (k - S'')z^2 = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré rapporté à ses axes.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars,* quai des Augustins, 55.)

I.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; par MM. *Eugène Rouché,* professeur au lycée Charlemagne, répétiteur à l'École Polytechnique, etc., et *Charles de Comberousse,* professeur au collége Chaptal, répétiteur à l'École Centrale, etc. — *Première partie :* GÉOMÉTRIE PLANE. In-8 avec 265 figures dans le texte; 1864. Prix : 4 francs. — *Deuxième partie :* GÉOMÉTÉIE DANS L'ESPACE ET COURBES USUELLES. In-8 avec 305 figures dans le texte; 1866. Prix : 6 francs. — Paris, chez Gauthier-Villars.

En rendant compte de la première Partie de ce Traité (*Nouvelles Annales,* janvier 1865), nous avons fait connaître le but de l'ouvrage : développer avec le plus grand soin la partie classique et résumer dans un Appendice les principales méthodes de la Géométrie moderne. Cette seconde Partie montre encore mieux que la première le but que les auteurs se sont proposé. Les Appendices y tiennent une plus grande place; car ce n'est que quand on possède un nombre suffisant de principes qu'on peut entreprendre efficacement l'analyse des travaux les

plus sérieux. Occupons-nous d'abord de la partie classique de l'ouvrage.

Le cinquième Livre a subi une heureuse modification relative à la perpendiculaire au plan. On sait combien cette théorie est minutieuse quand on veut l'établir rigoureusement, et combien elle donne de peine à ceux qui l'étudient pour la première fois. La démonstration du théorème fondamental offrait l'inconvénient de prouver la propriété, en quelque sorte, d'une manière aveugle, sans que l'esprit aperçût les motifs qui le guidaient dans la série des raisonnements; en outre, la définition de la perpendiculaire au plan était donnée d'une manière trop restreinte; il fallait chaque fois, dans les applications, transporter les droites du plan parallèlement à elles-mêmes; de là des longueurs, des redites fastidieuses. En commençant par définir d'une manière générale l'angle de deux droites, et profitant d'une démonstration très-lucide et très-simple qui leur a été suggérée par M. Ossian Bonnet, les auteurs sont parvenus à rendre cette théorie à la fois logique, facile, et surtout commode dans les applications; le théorème des trois perpendiculaires, la proposition qui consiste en ce que deux droites parallèles ont leur plan perpendiculaire commun, et beaucoup d'autres, deviennent ainsi évidentes. Notons d'ailleurs qu'on obtient tous ces avantages sans renverser l'ordre établi, car il suffit de déplacer deux théorèmes. Il y a donc là une véritable amélioration, et non une de ces innovations inutiles que les auteurs ont constamment évitées dans tout le cours de l'ouvrage.

Ce cinquième Livre renferme toutes les propositions nécessaires au début de la Géométrie descriptive, et nous appellerons encore l'attention sur l'exposition de la théorie des angles trièdres et polyèdres.

Dans le sixième Livre, la mesure du parallélipipède, celle de la pyramide et du prisme tronqués ont été simplifiées, grâce à quelques remarques heureuses; nous citerons particulièrement une démonstration nouvelle du volume des troncs de pyramide triangulaire, la distinction entre les troncs de première

et de seconde espèce qui facilite les applications de l'Algèbre, un théorème très-général sur le volume de certains polyèdres dû probablement à Steiner, et la théorie de la symétrie, qui a été amenée au dernier degré de simplicité à l'aide des travaux de Bravais, que M. Prouhet avait déjà mis à profit dans son édition des *Éléments* de Lacroix.

Le septième Livre comprend l'étude des corps ronds et des notions générales sur les surfaces. On sait combien la Géométrie sphérique a pris d'importance dans les examens pour l'École Polytechnique. Les élèves trouveront dans cet ouvrage tous les développements désirables sur ce sujet. Les volumes des corps ronds sont donnés d'une manière rigoureuse et très-simple, en profitant de l'amélioration que les auteurs avaient déjà introduite dans la mesure de la circonférence. Nous avons encore remarqué la démonstration relative au plan tangent à une surface quelconque, que M. Rouché professe depuis plusieurs années dans son cours de Géométrie descriptive, et celle du plus court chemin entre deux points sur la sphère, qui a été communiquée aux auteurs par M. Bonnet.

Enfin le huitième Livre, consacré aux courbes usuelles, renferme d'abord l'étude de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, d'après leur propriété focale, d'où découlent les propriétés des tangentes dont la démonstration a été améliorée. Puis vient un chapitre sur la section du cône et de la surface gauche de révolution, où l'on établit d'une manière simple que la projection d'une conique sur un plan est encore une conique. Ici s'est glissée une faute que les auteurs nous ont prié de signaler. A la page 669, entre les lignes 27 et 28, il faut insérer la phrase suivante qui a été omise dans la composition : « *dont le diamètre est égal au petit axe de l'ellipse.* » Les tracés qui dérivent de l'ellipse comme projection du cercle et l'étude de l'hélice terminent la partie classique de ce huitième Livre.

Passons aux Appendices. Nous ne nous arrêterons pas sur celui du cinquième Livre où se trouvent réunies les propriétés du quadrilatère gauche et du rapport anharmonique de quatre plans. Celui du sixième Livre contient déjà des travaux d'une

importance capitale : les propriétés des polyèdres convexes qui découlent du fameux théorème d'Euler ; l'étude difficile des conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer un polyèdre convexe, d'après les travaux de Legendre et de Cauchy ; la théorie géométrique des centres de gravité, son application à la détermination du volume du tronc de pyramide à base quelconque, etc.

Mais les deux Appendices les plus importants sont sans contredit les deux derniers, l'un de cinquante pages, l'autre de soixante-dix, imprimés en petits caractères, et remplis, non de faits isolés, mais de théories fondamentales résumées avec beaucoup de précision et de clarté. Il nous serait impossible d'en donner ici une analyse complète ; nous appellerons seulement l'attention sur les points principaux.

Dans le premier, on trouve d'abord la théorie des polyèdres réguliers ordinaires et celle des polyèdres d'espèce supérieure : « les mémorables découvertes de Poinsot, matière ardue que » (suivant les paroles prononcées par M. Chasles, en présentant l'ouvrage à l'Académie des Sciences) « les auteurs sont parve- » nus à exposer avec une grande lucidité, en analysant les tra- » vaux de Cauchy et de M. Bertrand sur ce sujet. » On a en outre rectifié quelques erreurs relatives à l'espèce des nouveaux polyèdres et représenté ces corps au moyen de quatre belles figures gravées par Dulos. Une autre partie remarquable de cet Appendice est celle qui est relative aux compléments de Géométrie sphérique, au problème du contact des sphères, et surtout à l'étude des figures tracées sur la sphère, où l'on a généralisé les propriétés du rapport anharmonique, des axes radicaux, des pôles, des polaires, des centres de similitude, etc. On y trouve en outre le complément de la méthode des rayons vecteurs réciproques, la projection stéréographique, le théorème de Guldin et la démonstration, suivant Steiner, de la propriété dont jouit la sphère d'être maximum parmi les corps de même surface.

Le deuxième Appendice débute par une exposition succincte, mais complète, des divisions homographiques et de l'involu-

tion, en partant de l'équation à quatre termes. On est ainsi conduit naturellement et rigoureusement à l'introduction des imaginaires en Géométrie et à la notion féconde des points du cercle situés à l'infini, due à M. Poncelet. Cette partie du livre a valu à leurs auteurs de justes éloges de la part de M. Chasles, dont l'autorité est si grande en pareille matière, et qui en a conseillé la lecture aux auditeurs de son cours à la Sorbonne.

Les principes n'offrant d'intérêt que par les applications qu'on peut en faire, MM. Rouché et de Comberousse ont tenu à montrer toute la fécondité des théories précédentes en les appliquant aux coniques considérées comme intersection de deux faisceaux homographiques. Leur but a été d'établir par la Géométrie pure les propriétés des coniques que l'on expose ordinairement par l'analyse dans les cours de Mathématiques spéciales. Toutes les démonstrations y sont très-simples, et un grand nombre d'entre elles sont dues aux auteurs de ce livre. Nous signalerons surtout celle du théorème fondamental, l'introduction des foyers, la recherche des équations des trois courbes, etc. Après cette exposition des propriétés fondamentales, on trouve une rapide esquisse des méthodes générales, les principes de la méthode des polaires réciproques, la théorie des figures homologiques, la méthode par projection conique, suivies d'un grand nombre d'applications propres à en bien faire comprendre l'esprit et la fécondité, et à inspirer aux jeunes gens studieux le désir de lire les savants écrits de MM. Chasles et Poncelet.

Deux Notes terminent cet ouvrage. Dans la première on a reproduit la démonstration, convenablement élucidée, de Lambert sur l'incommensurabilité de π. Dans la seconde, on fait connaître sous forme de déterminants quelques relations fondamentales dues à Euler, Lagrange, Carnot, et pour la démonstration desquelles on a mis à profit les travaux importants de Joachimsthal, Brioschi et Cayley.

Cette analyse, que le grand nombre de matières renfermées dans l'ouvrage ne nous a pas permis de réduire à des propor-

tions plus courtes, permet de reconnaître que les auteurs ont bien atteint le but qu'ils s'étaient proposé : donner à ceux qui feront une lecture attentive de ce livre une connaissance exacte de toutes les méthodes nouvelles, et les mettre dès lors à même de lire avec facilité les ouvrages spéciaux dans lesquels elles se trouvent développées.

Nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons dit dans notre premier article relativement à la partie matérielle de ce Traité. Toujours le même soin et la même élégance dans l'impression; les énoncés des propositions, écrits en lettres italiques, permettent de résumer en un instant toute la marche d'une théorie très-étendue; les nombreuses figures intercalées sont dessinées très-nettement, et sous tous les rapports cet ouvrage occupera une place distinguée parmi les belles éditions sorties des presses de M. Gauthier-Villars.

Nous avons déjà parlé des nombreuses questions proposées comme exercices dans la première Partie; la seconde n'est pas moins riche en applications; le choix des théorèmes et des problèmes est fait avec la même attention; leur nombre est de 654, ce qui porte à 1157 le nombre total des exercices proposés dans ce Traité.

Nous ne terminerons pas sans signaler au lecteur une Préface intéressante dans laquelle les auteurs ont donné une histoire succincte de la Géométrie depuis ses origines jusqu'à nos jours. Ce travail était d'autant plus utile, comme introduction à l'ouvrage que nous venons d'analyser, que peu de lecteurs peuvent se procurer aujourd'hui le magnifique ouvrage de M. Chasles sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.

S. Hauser,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne et au collége Chaptal.

QUESTIONS.

749. $My^2 + Nx^2 - 1 = 0$ étant l'équation d'une conique;

α, β, γ représentant les angles faits avec l'axe des x par les trois côtés d'un triangle inscrit dans la conique;

x_0, y_0, r représentant les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle;

On a les relations suivantes :

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{N x_0}{r(M-N)},$$

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r(M-N)}{M y_0},$$

$$M[y_0 + r\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2 + N[x_0 + r\sin(\alpha+\beta+\gamma)]^2 - 1 = 0.$$

(J.-J.-A. MATHIEU.)

750. Si on fait la projection gauche (*) d'une figure plane sur un tableau plan, et si on fait ensuite tourner l'un des deux plans autour de leur intersection commune, les deux figures demeureront toujours les projections gauches l'une de l'autre.

(ABEL TRANSON.)

751. La surface de révolution engendrée par une ellipse de Cassini tournant autour de son axe non focal est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

En général, si on coupe le tore par un plan parallèle à l'axe du tore, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe (parallèle à celui du tore) sera coupée par un plan bitangent suivant deux cercles. (DARBOUX.)

(*) *Voir* l'article intitulé : *De la projection gauche* (*Nouvelles Annales*, septembre 1865.)

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN

(voir 2e série, t. IV, p. 413);

PAR M. PAINVIN.

Définition et propriétés principales des surfaces polaires d'un plan.

1. L'*ordre* d'une surface est égal au nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite quelconque; l'ordre est égal au degré de l'*équation ponctuelle*.

La *classe* d'une surface est égale au nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque; la classe est égale au degré de l'*équation tangentielle*.

Soient une surface de $n^{\text{ième}}$ *classe et un plan fixe* P; *par une droite quelconque* D, *située dans ce plan, menons à la surface ses* n *plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$; *j'appellerai* polaire $(n-p)^{\text{ième}}$ du plan P *l'enveloppe d'un plan* Q *passant par la droite* D *et tel, que*

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_p \left(\frac{1}{\text{tang PDQ}} - \frac{1}{\text{tang PDT}_1}\right)\left(\frac{1}{\text{tang PDQ}} - \frac{1}{\text{tang PDT}_2}\right)\cdots \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\text{tang PDQ}} - \frac{1}{\text{tang PDT}_p}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

la somme s'étendant à toutes les combinaisons p *à* p *des différences correspondant aux* n *angles dièdres* $\widehat{\text{PDT}_1}$, $\widehat{\text{PDT}_2}, \ldots, \widehat{\text{PDT}_n}$.

L'ordre des lettres indique le sens de rotation des angles; on regardera ces angles comme positifs ou négatifs, suivant que la rotation ainsi indiquée a lieu dans un sens ou en sens contraire.

Cette relation peut aussi s'écrire

$$\text{(II)} \qquad \sum_p \frac{\sin \widehat{QDT_1}}{\sin \widehat{PDT_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{QDT_2}}{\sin \widehat{PDT_2}} \cdots \frac{\sin \widehat{QDT_p}}{\sin \widehat{PDT_p}} = 0.$$

2. Pour déterminer les surfaces polaires d'un plan, je désignerai par (x_0, y_0, z_0, t_0) les coordonnées du plan P; par (x, y, z, t) celles du plan variable Q; et enfin par (x_i, y_i, z_i, t_i) celles du plan tangent T_i passant par l'intersection D des plans P et Q; nous aurons, d'après les formules (11) (1[re] partie),

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \dfrac{\lambda x_0 + \mu x}{\rho}, \quad y_i = \dfrac{\lambda y_0 + \mu y}{\rho}, \quad z_i = \dfrac{\lambda z_0 + \mu z}{\rho}, \\ t_i = \dfrac{\lambda t_0 + \mu t}{\rho}, \qquad \text{où} \quad \dfrac{\sin \widehat{QDT_i}}{\sin \widehat{T_i DP}} = \dfrac{\lambda}{\mu}. \end{array} \right.$$

Soit alors

$$\text{(2)} \qquad U(x, y, z, t) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface; les solutions de cette équation donneront les coordonnées des plans tangents à la surface. Si, dans l'équation (2), nous remplaçons x_i, y_i, z_i, t_i par leurs valeurs (1), nous obtiendrons une équation en $\frac{\lambda}{\mu}$, dont les racines seront les rapports des sinus des angles des plans tangents T_i avec les plans Q (x, y, z, t) et P (x_0, y_0, z_0, t_0). En égalant à zéro le coefficient de $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-p}$ ou de $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^p$, nous exprimerons que la relation (II) est satisfaite, car ce coefficient sera, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\sum_p \frac{\sin \widehat{QDT_1}}{\sin \widehat{T_1 DP}} \cdot \frac{\sin \widehat{QDT_2}}{\sin \widehat{T_2 DP}} \cdots \frac{\sin \widehat{QDT_p}}{\sin \widehat{T_p DP}}.$$

Nous aurons ainsi une relation entre les coordonnées (x, y, z, t) du plan Q; cette équation en représentera donc l'enveloppe et sera, d'après notre définition, l'*équation tangentielle de la polaire* $(n-p)^{\text{ième}}$ *du plan* P.

L'équation (2) étant homogène, la substitution des valeurs (1) donne

$$(3)\qquad U(\lambda x_0 + \mu x,\ \lambda y_0 + \mu y,\ \lambda z_0 + \mu z,\ \lambda t_0 + \mu t) = 0.$$

La formule de Taylor

$$\begin{aligned} &f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, t+\delta) \\ &\quad = f(x,y,z,t) + \left(\alpha\frac{d.}{dx} + \beta\frac{d.}{dy} + \gamma\frac{d.}{dz} + \delta\frac{d.}{dt}\right) f + \ldots \\ &\qquad + \frac{1}{1.2\ldots p}\left(\alpha\frac{d.}{dx} + \beta\frac{d.}{dy} + \gamma\frac{d.}{dz} + \delta\frac{d.}{dt}\right)^p f + \ldots \end{aligned}$$

appliquée à l'équation (3), en regardant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme respectivement égaux à $\frac{\mu}{\lambda}x, \frac{\mu}{\lambda}y, \frac{\mu}{\lambda}z, \frac{\mu}{\lambda}t$, nous conduit à

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &U_0 + \frac{\mu}{\lambda}\Delta_1 U_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \Delta_2 U_0 + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-2}\Delta_2 U + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}\Delta_1 U + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n U = 0, \end{aligned}\right.$$

après avoir adopté les notations symboliques

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_p U_0 &= \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p U_0, \\ \Delta_p U &= \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^p U_0, \end{aligned}\right.$$

$$U = U(x, y, z, t),$$

$$U_0 = U(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Car il est facile de se convaincre que

$$\Delta_p U_0 = \Delta_{n-p} U,$$

c'est-à-dire

(6)
$$\left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p U_0 = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U;$$

il suffit pour cela de développer l'équation (3), en y considérant α, β, γ, δ comme respectivement égaux à $\frac{\lambda}{\mu}x_0$, $\frac{\lambda}{\mu}y_0$, $\frac{\lambda}{\mu}z_0$, $\frac{\lambda}{\mu}t_0$, et d'identifier le résultat obtenu avec le premier développement.

D'après cela, *la* $(n-p)^{\text{ième}}$ *polaire du plan* (x_0, y_0, z_0, t_0) *a pour équation*

(7)
$$\Delta_p U_0 = \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p U_0 = 0,$$

ou

$$\Delta_{n-p} U = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U = 0,$$

ou bien *la* $p^{\text{ième}}$ *polaire du plan* (x_0, y_0, z_0, t_0) *a pour équation*

(7 *bis*)
$$\Delta_{n-p} U_0 = \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U_0 = 0,$$

ou

$$\Delta_p U = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^p U = 0.$$

Nous conclurons de ce calcul que :

La $(n-p)^{\text{ième}}$ *polaire d'un plan est de la* $p^{\text{ième}}$ *classe, ou la* $p^{\text{ième}}$ *polaire est de la* $(n-p)^{\text{ième}}$ *classe.*

La $(n-1)^{\text{ième}}$ *polaire est un point :* je l'appellerai *point polaire du plan.*

3. On peut, dans la relation (II), remplacer les rapports des sinus par les rapports des distances correspondantes. Désignons par d_i et λ_i les distances d'un point du plan tangent T_i aux plans P et Q; cette relation deviendra

$$\sum \frac{\lambda_1}{d_1} \cdot \frac{\lambda_2}{d_2} \cdots \frac{\lambda_p}{d_p} = 0.$$

Mais si l'on suppose que le plan P s'éloigne à l'infini, les plans Q, $T_1, T_2, \ldots, T_n$, qui se coupent suivant une même droite située dans le plan P, deviendront parallèles; les distances d_i pouvant être regardées comme égales, la relation ci-dessus donnera

$$\text{(III)} \qquad \sum \lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_p = 0,$$

λ_i étant la distance du plan Q au plan parallèle T_i et cette somme s'étendant à toutes les combinaisons p à p des n distances $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ceci posé, *imaginons qu'on mène à une surface de $n^{ième}$ classe tous ses plans tangents parallèles à un même plan quelconque; soit alors un plan* Q *parallèle à ces plans tangents et tel, que*

$$\sum \lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_p = 0,$$

quelle que soit la direction considérée; le point Q *enveloppera une certaine surface que j'appellerai* la $(n-p)^{ième}$ enveloppe diamétrale *de la surface primitive.*

On voit, par ce qui a été dit ci-dessus, que les enveloppes diamétrales sont les polaires du plan à l'infini.

Les coordonnées du plan à l'infini sont infinies; mais on voit facilement, par les formules de la première par-

tie, que ces coordonnées sont entre elles comme les constantes m, n, p, q (1[re] partie, 1, 3, 4). Donc :

La $(n-p)^{ième}$ enveloppe diamétrale se déduira de la $(n-p)^{ième}$ polaire du plan (x_0, y_0, z_0, t_0), en y remplaçant ces coordonnées respectivement par les constantes m, n, p, q.

4. Avant de passer à l'étude des principales propriétés des polaires, je ferai quelques remarques sur les formes symboliques que j'ai employées. Et d'abord je prendrai la notation plus générale

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta_p^i \mathrm{U} = \left(x_i \dfrac{d.}{dx} + y_i \dfrac{d.}{dy} + z_i \dfrac{d.}{dz} + t_i \dfrac{d.}{dt}\right)^p \mathrm{U}, \\ \Delta_{n-p} \mathrm{U}_i = \left(x \dfrac{d.}{dx} + y \dfrac{d.}{dy} + z \dfrac{d.}{dz} + t \dfrac{d.}{dt}\right)^{n-p} \mathrm{U}_i, \end{array}\right.$$

qui donne, sous deux formes différentes, la $p^{ième}$ polaire du plan $\mathrm{P}_i (x_i, y_i, z_i, t_i)$.

Je vais démontrer les deux identités

$$\left\{\begin{array}{ll} (9) & \Delta_q^j (\Delta_p^i \mathrm{U}) = \Delta_p^i (\Delta_q^j \mathrm{U}), \\ (10) & \Delta_q^i (\Delta_p^i \mathrm{U}) = \Delta_{p+q}^i \mathrm{U}. \end{array}\right.$$

La première de ces relations rendue explicite donne

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(x_j \dfrac{d.}{dx} + y_j \dfrac{d.}{dy} + \ldots\right)^q \underbrace{\left[\left(x_i \dfrac{d.}{dx} + \ldots\right)^p \mathrm{U}\right]}_{\mathrm{H}} \\ = \left(x_i \dfrac{d.}{dx} + y_i \dfrac{d.}{dy} + \ldots\right)^p \underbrace{\left[\left(x_j \dfrac{d.}{dx} + \ldots\right)^q \mathrm{U}\right]}_{\mathrm{G}}. \end{array}\right.$$

Or le terme général de la fonction H est

$$\frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\, x_i^\alpha y_i^\beta z_i^\gamma t_i^\delta\, \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\mathrm{U}}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma\, dt^\delta};$$

et, par suite, le terme général du premier membre de l'égalité (1°) sera

$$(2^\circ)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p!\,q!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\alpha_1!\,\beta_1!\,\gamma_1!\,\delta_1!}\, x_j^{\alpha_1} y_j^{\beta_1} z_j^{\gamma_1} t_j^{\delta_1} . x_i^{\alpha} y_i^{\beta} z_i^{\gamma} t_i^{\delta} \\ \quad \times \dfrac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1}\,\mathrm{U}}{dx^{\alpha+\alpha_1}\,dy^{\beta+\beta_1}\,dz^{\gamma+\gamma_1}\,dt^{\delta+\delta_1}}, \end{array} \right.$$

en admettant que les nombres entiers positifs α, α_1, etc., vérifient les relations

$$(3^\circ)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma+\delta=p, \\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=q. \end{array} \right.$$

En opérant de la même manière sur le second membre de l'égalité (1°), on retrouve la même expression pour le terme général. L'identité (9) est donc vraie. On démontrera l'identité (10) en introduisant l'hypothèse $j=i$ dans l'expression (2°), et en ayant égard à l'identité $(x+a)^p\,(x+a)^q=(x+a)^{p+q}$.

5. Théorème I. — *Si par une droite fixe* D *on mène les plans tangents à une surface donnée par son équation tangentielle, le produit continu des sinus des angles d'un plan quelconque* Q *passant par cette droite* D *avec les plans tangents est proportionnel au résultat de la substitution des coordonnées de ce plan dans le premier membre de l'équation de la surface.*

Ce théorème n'est que la traduction de l'égalité suivante, qui nous est fournie par l'équation (4),

$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{QDT}_1}\,.\,\sin\widehat{\mathrm{QDT}_2}\ldots\sin\widehat{\mathrm{QDT}_n}}{\sin\widehat{\mathrm{PDT}_1}\,.\,\sin\widehat{\mathrm{PDT}_2}\ldots\sin\widehat{\mathrm{PDT}_n}}=\frac{\mathrm{U}\,(x,\,y,\,z,\,t)}{\mathrm{U}_0\,(x_0,\,y_0,\,z_0,\,t_0)}.$$

6. Théorème II. — *Le point polaire d'un plan est le centre harmonique par rapport au plan des points de*

contact des plans tangents issus d'une droite quelconque située dans ce plan; le centre harmonique reste donc invariable lorsque la droite se déplace dans le plan.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les points de contact des plans tangents $T_1, T_2, \ldots, T_n$ menés à la surface par une droite D située dans un plan fixe P; le *point polaire* du plan P est l'enveloppe des plans Q satisfaisant (I) à la relation

$$(1^\circ) \quad \frac{n}{\operatorname{tang}\widehat{QDP}} = \frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{PDT_1}} + \frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{PDT_2}} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{PDT_n}}.$$

Or, je dis que le plan Q passe par le centre harmonique C, par rapport au plan P, des points $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Menons (*), en effet, par C un plan perpendiculaire à la droite D, et désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les points d'intersection par ce plan auxiliaire du faisceau ($MT_1, MT_2, \ldots, MT_n$), M étant un point quelconque du plan P; et soient ($Ot_1, Ot_2, \ldots, Ot_n, Op, Oq$) les intersections par ce même plan auxiliaire des plans ($DT_1, DT_2, \ldots, DT_n$, DP, DQ). D'après la définition du centre harmonique d'un système de points dans l'espace, le point C sera le centre harmonique, par rapport à la droite Op, des points ($t_1, t_2, \ldots, t_n$) situés dans le plan auxiliaire. Menons enfin par le point C une droite perpendiculaire à Op, et soient ($p', q', t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$) les intersections de cette perpendiculaire avec les droites ($Op, Oq, Ot_1, Ot_2, \ldots, Ot_n$). D'après la définition du centre harmonique d'un système de points dans un plan, le point C sera le centre harmonique, par rapport au point p', des points ($t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$) situés en ligne droite avec p'; nous

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

aurons par conséquent

$$(2^\circ) \qquad \frac{n}{Cp'} = \frac{1}{p't'_1} + \frac{1}{p't'_2} + \ldots + \frac{1}{p't'_n}.$$

Mais si nous remarquons que

$$\operatorname{tang}\widehat{QDP} = \frac{q'p'}{Op'}, \quad \operatorname{tang}\widehat{PDT_i} = \frac{p't'_i}{Op'},$$

la relation (1°) nous donne

$$(3^\circ) \qquad \frac{n}{q'p'} = \frac{1}{p't'_1} + \frac{1}{p't'_2} + \ldots + \frac{1}{p't'_n}.$$

De la comparaison des égalités (2°) et (3°) résulte $p'C = p'q'$, c'est-à-dire que le point C coïncide avec le point q', ou enfin que le plan Q passe par le centre harmonique C, par rapport au plan P, des points de contact $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Or le plan Q est tangent au lieu des centres harmoniques. En effet, le point de contact d'un plan tangent est l'intersection de ce plan avec les plans tangents infiniment voisins; par suite, si nous considérons des faisceaux de plans tangents infiniment voisins du précédent, le point C restera le même, et les plans Q′ correspondant à ces faisceaux se couperont au point C; donc le point C est le point de contact du plan Q. Ainsi les plans Q enveloppent le lieu des centres harmoniques des points de contact des plans tangents issus d'une droite quelconque du plan P; or, l'enveloppe des plans Q est un point, point polaire des plans P. Donc, etc.

Lorsqu'on suppose le plan P à l'infini, le centre harmonique devient le centre des moyennes distances, et nous avons ce théorème :

Si l'on mène à une surface de $n^{ième}$ classe tous

ses plans tangents parallèles à un même plan, leurs points de contact auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quelle que soit la direction du plan considéré, et ce point fixe est le point polaire du plan à l'infini.

Je donnerai à ce point le nom de *centre des moyennes distances* de la surface.

7. Théorème III. — *Si deux surfaces de $n^{ième}$ classe sont tangentes aux mêmes points à un même faisceau de n plans, le point polaire d'un plan quelconque passant par l'arête du faisceau sera le même pour les deux surfaces.*

Car le point polaire coïncide avec le centre harmonique, lequel est évidemment le même pour les deux surfaces.

Corollaire I. — *Si* P *est le plan considéré passant par l'arête du faisceau, et si, par une droite quelconque* D *située dans ce plan, on mène les plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *à la première surface, puis les plans tangents* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *à la seconde, on aura la relation*

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PDT_i}} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PDt_i}}.$$

Le point polaire du plan P est en effet le même pour les deux surfaces; or, si Q est le plan passant par la droite D et le point polaire commun, on a (I)

$$\frac{n}{\operatorname{tang} \widehat{PDQ}} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PDT_i}}, \quad \frac{n}{\operatorname{tang} \widehat{PDQ}} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PDt_i}},$$

ce qui démontre la relation énoncée.

Corollaire II. — *Par une droite fixe* D, *menée dans*

un plan P, *soient menés les n plans tangents* $T_1, T_2, \ldots,$ T_n *à une surface de* $n^{ième}$ *classe; maintenant, par une droite quelconque* D′ *située dans le même plan, conduisons les n plans tangents* $t_1, t_2, \ldots, t_n$; *puis, par cette même droite* D′ *et les points de contact des plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *menons les n plans* $D'r_1$, $D'r_2, \ldots,$ $D'r_n$; *on aura la relation*

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PD'\,t_i}} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PD'\,r_i}}.$$

Nous pouvons en effet regarder les n points de contact des plans tangents primitifs comme une surface de $n^{ième}$ classe; et alors les plans tangents menés à cette surface par la droite D′ ne sont autres que les plans $D'r_1$, $D'r_2, \ldots, D'r_n$; le théorème énoncé n'est donc qu'un cas particulier du corollaire précédent.

Corollaire III. — *Lorsque deux surfaces de* $n^{ième}$ *classe sont tangentes aux mêmes points à un même faisceau de n plans parallèles, ces deux surfaces ont le même centre des moyennes distances.*

En effet, le théorème (III) est encore vrai lorsque la droite d'intersection des plans est à l'infini; et alors, le point polaire d'un plan quelconque P parallèle aux plans tangents communs sera le même pour les deux surfaces; or, lorsque le plan P est à l'infini, le point polaire est le centre des moyennes distances.

8. Théorème IV. — *L'enveloppe des plans dont les* $p^{ièmes}$ *polaires touchent un plan donné* P_0 *est la* $(n-p)^{ième}$ *polaire de ce plan.*

La $p^{ième}$ polaire d'un plan P_1 est

$$\Delta_p^1 U = \Delta_{n-p} U_1 = \left(x \frac{d.}{dx} + y \frac{d.}{dy} + z \frac{d.}{dz} + t \frac{d.}{dt} \right)^{n-p} U_1 = 0;$$

cette surface devant toucher le plan fixe P_0, on aura

$$\left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U_1 = 0;$$

ou, en regardant (x_1, y_1, z_1, t_1) comme des coordonnées courantes,

$$\left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U = 0;$$

c'est précisément la $(n-p)^{ième}$ polaire du plan P_0.

De ce théorème nous concluons les cas particuliers suivants :

L'enveloppe des plans dont les premières polaires touchent un plan fixe est le point polaire de ce plan ; donc ces plans passent par un point fixe.

L'enveloppe des plans dont les points polaires parcourent un plan fixe est la première polaire de ce plan.

L'enveloppe des plans dont les $p^{ièmes}$ polaires touchent le plan à l'infini est la $(n-p)^{ième}$ enveloppe diamétrale de la surface.

9. Théorème V. — *Les premières polaires de tous les plans passant par un point fixe ont $(n-1)^3$ plans tangents communs, qui sont les $(n-1)^3$ plans ayant pour point polaire le point fixe.*

Nous venons de voir, en effet, que l'enveloppe des plans dont les points polaires sont sur un plan fixe est la première polaire de ce plan ; et réciproquement, tout plan tangent à la première polaire d'un plan a son point polaire sur ce plan ; cette réciproque résulte du même calcul. Or, soit un point fixe O ; imaginons un plan P passant par ce point ; les plans dont les points polaires décrivent le plan P sont tangents à la première polaire S de ce plan, surface de $(n-1)^{ième}$ classe. On voit de même que les

plans ayant pour point polaire le point O doivent aussi être tangents aux premières polaires S′, S″ de deux autres plans P′, P″ passant par le point O. Ainsi tout plan tangent commun aux trois surfaces S′, S″, S‴ a pour point polaire le point O, et réciproquement. Mais ces trois surfaces, qui sont toutes trois de $(n-1)^{ième}$ classe, ont $(n-1)^3$ plans tangents communs. Donc le point O est le point polaire de $(n-1)^3$ plans, etc.

10. Théorème VI. — *Le point polaire d'un plan tangent à la surface est le point de contact de ce plan tangent; et réciproquement, lorsqu'un plan contient son point polaire, ce plan est tangent à la surface au point polaire.*

Car le point polaire du plan P_0 est

$$(1^\circ) \quad x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_0 + t\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 0;$$

or, si ce plan est tangent à la surface, on a

$$(2^\circ) \qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0;$$

ces équations donnent précisément le point de contact du plan P_0 (première partie). Réciproquement, en exprimant que le point polaire est sur le plan, on a

$$x_0\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + y_0\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 + z_0\left(\frac{dU}{dz}\right)_0 + t_0\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = nU(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0;$$

c'est-à-dire que le plan P_0 est tangent.

11. Théorème VII. — *Les plans tangents aux points où un plan fixe coupe une surface sont en même temps tangents à la première polaire de ce plan.*

Nous avons vu en effet que la première polaire d'un

plan P est l'enveloppe des plans dont les points polaires décrivent le plan P (8); par suite, si le point polaire est un des points de l'intersection du plan P avec la surface, le plan dont il est le point polaire sera en même temps tangent à la surface en ce point (10). Donc les plans tangents à la surface aux points où elle est coupée par le plan P sont en même temps tangents à la première polaire de ce plan. Réciproquement, tout plan tangent commun à la surface et à la première polaire du plan P est tangent en un des points d'intersection du plan avec la surface; car le point polaire est à la fois sur le plan P (8) et sur le plan tangent (10).

12. Théorème VIII. — *Les plans tangents aux points où une droite rencontre la surface sont tangents en même temps à la première polaire d'un plan quelconque passant par cette droite. Une surface de $n^{ième}$ classe est, en général, de l'ordre $n(n-1)^2$.*

Soit D la droite donnée, P un plan passant par cette droite, et S la première polaire de ce plan; les plans tangents aux divers points de la courbe d'intersection devront toucher la surfaces (11). Il en sera de même pour la première polaire S′ d'un second plan P′ passant par la droite D. Ainsi tout plan tangent à la surface en un point où elle est rencontrée par la droite D devra toucher aussi les premières polaires S et S′. La réciproque est visible, car le point polaire d'un plan tangent à S et S′ est sur la droite D (8); et comme le plan touche la surface primitive, le point polaire est le point de contact (10). Or, les trois surfaces considérées étant des classes respectives n, $(n-1)$ et $(n-1)$, elles auront, en général, $n(n-1)^2$ plans tangents communs. Donc la droite D rencontre la surface en $n(n-1)^2$ points.

(*La suite prochainement.*)

DE LA PROJECTION GAUCHE (suite)

(voir 2e série, t. IV, p. 385);

Par M. Abel TRANSON.

XI. *Objet de ce second article.* — On a vu que, par la projection gauche, toute ligne de l'ordre n est transformée en une ligne de l'ordre $2n$; à moins que la ligne primitive ne passe par certains points, circonstance qui en réduisant l'ordre à n'être plus que l'un des nombres $2n-1$, $2n-2$, $2n-3$,..., permet d'obtenir des transformées d'ordre impair aussi bien que d'ordre pair. J'ajoute que toute ligne, après sa transformation, passe par trois points particuliers du tableau, lesquels trois points sont pour chacune des transformées des points multiples de l'ordre n, si n marque l'ordre de la ligne primitive.

Ces propriétés, qu'on pourrait croire caractéristiques de la projection gauche, lui sont communes avec la transformation par rayons vecteurs réciproques telle qu'elle a été récemment généralisée par M. Hirst (*). D'après cela, et probablement aussi à cause de la très-grande diversité de conditions que comporte cette nouvelle méthode, comparativement à la détermination unique des conditions de la projection gauche, plusieurs personnes ont présumé que les résultats de M. Hirst devaient comprendre, comme des cas particuliers, ceux que j'ai présentés dans un précédent article. Je me propose de mon-

(*) *On the quadric inversion of plane curves*, by T.-A. Hirst, F. R. S.; from the *Proceedings of the Royal Society*, Marsh 2, 1865.

trer ici qu'une telle opinion serait inexacte. Je rendrai raison de ce que les deux méthodes ont en commun certaines propriétés, et cependant je ferai voir qu'elles ne sont pas réductibles l'une à l'autre. Je ne crains pas d'entrer dans cette discussion, parce que le lecteur y trouvera au moins l'avantage de connaître les principes de l'intéressante méthode due à M. Hirst.

XII. Théorème. — *Si, après avoir construit une projection gauche, on fait tourner le plan du tableau autour de son intersection avec le plan primitif, les deux figures ne cessent pas d'être les projections l'une de l'autre* (*).

Cette propriété, qui, comme on sait, appartient aussi à la projection centrale ou perspective, nous permettra de rabattre le plan du tableau sur le plan primitif, ou mieux encore, de faire la *transformation gauche* d'une figure plane dans son plan ; ce qui, en supprimant toute considération des trois dimensions de l'espace, facilitera la comparaison de cette sorte de transformation avec la méthode des rayons vecteurs réciproques.

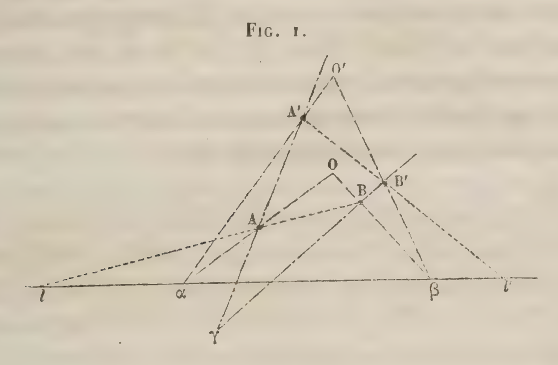
XIII. *Transformation gauche dans le plan*. — Soient A et B les pieds des directrices dans le plan primitif ; A' et B' leurs pieds sur le tableau, celui-ci étant supposé rabattu sur le premier par une rotation autour de l'intersection commune ll'.

On verra aisément que pour obtenir le point O' correspondant ou transformé du point O, il faut joindre ce dernier aux points A et B ; prolonger les lignes OA, OB

(*) Je laisse aux jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales* le soin de démontrer ce théorème, et aussi la correspondance des points du plan primitif et du tableau indiqué au n° XIII.

jusqu'à leurs rencontres α et β avec ll', puis pousser $\alpha A'$ et $\beta B'$ jusqu'à leur rencontre qui sera le point O'.

Fig. 1.



On peut appeler ll' l'*axe de transformation*; A, B, l' seront les *trois points principaux* de la figure primitive; et, comme il y a une réciprocité parfaite entre les deux figures, A', B' et l seront les *trois points principaux* de la seconde.

Les plus simples principes de la *Géométrie supérieure* donneront les propriétés de cette transformation plane.

Supposant, par exemple, que O décrive une ligne droite, le lieu de O' est une conique comme étant déterminé par les rencontres des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour centres A' et B'.

De là, et par un raisonnement employé dans le premier article, cette conséquence, que toute courbe se transforme en une autre dont l'ordre est double.

A un point déterminé de l'une des figures correspond généralement un point unique de l'autre figure; mais il y a exception pour les points des droites qui joignent deux à deux les points principaux. C'est ainsi que :

1° A un point quelconque de AB correspond un seul point, le point l du tableau;

2° A un point quelconque de Al' correspond le seul point B';

3° A un point quelconque de Bl' correspond le seul point A'.

On peut dire aussi qu'au seul point A correspondent indifféremment tous les points de lB'; au point B tous ceux de lA'; au point l' tous ceux de $A'B'$, et ceci peut se voir directement ou bien être conclu, par voie de réciprocité, des trois remarques précédentes.

D'ailleurs, de ces remarques et du fait qu'une droite quelconque de la figure primitive rencontre nécessairement AB, Al' et Bl', il s'ensuit que la conique dans laquelle cette droite se transforme passe nécessairement par les trois points l, B' et A'; ce qui motive suffisamment leur dénomination de *points principaux* du tableau.

Et plus généralement, comme une courbe l'ordre n, tracée sur le plan primitif, a n rencontres avec les mêmes trois droites AB, Al', Bl', il est manifeste que sa transformée aura un point multiple de l'ordre n en chacun des mêmes points l, B' et A'.

XIV. *Transformation par rayons vecteurs réciproques* (méthode de M. Hirst). — Au lieu de considérer, comme à l'ordinaire, un cercle (de rayon OR) et de prendre sur chaque droite issue du centre deux points conjugués a et a', dont les distances à ce même centre constituent les deux *rayons réciproques* et sont liées par la relation

$$Oa.Oa' = \overline{OR}^2,$$

M. Hirst prend pour courbe fondamentale, non plus un cercle, mais une conique quelconque; il donne pour origine aux rayons, non pas le centre de cette conique, mais un point quelconque A de son plan; puis, sur chaque droite AR issue de ce point, il appelle *conjugués* deux

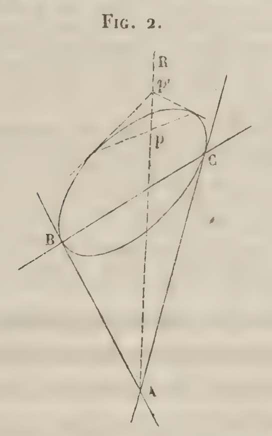
points p et p' tels, que l'un d'eux appartienne à la polaire de l'autre, condition qui entraîne entre ces deux points une parfaite réciprocité.

La position du point A qui peut être intérieur ou extérieur à la conique ou placé sur son périmètre; le choix même de la conique, qui peut être soit l'une des trois courbes générales, soit quelqu'une de leurs variétés, comme cercle, hyperbole équilatère, couple de droites réelles ou imaginaires...; ces circonstances très-diverses offrent à l'auteur, indépendamment des lois propres à la transformation généralisée, une foule de résultats très-dignes d'intérêt.

Sans entrer dans ce détail, je me bornerai à signaler les propriétés principales qui rapprochent la transformation gauche de la nouvelle méthode des rayons réciproques et quelques-unes de celles qui l'en distinguent essentiellement.

A cet effet, je prends pour exemple de la méthode de M. Hirst le cas où le point A, origine commune des rayons réciproques, est à l'extérieur de la conique.

Fig. 2.



Ayant mené du point A les deux tangentes AB, AC et

la corde de contact BC, on verra, d'après la définition des points conjugués, que si un point quelconque du plan se transforme en un point unique, il y a cependant exception :

1° Pour tous les points de la corde de contact, lesquels ont pour leur conjugué commun le point A;

2° Pour tous les points de AB qui ont leur conjugué en B;

3° Pour tous ceux de AC qui ont leur conjugué en C.

D'ailleurs deux points conjugués p et p' sont toujours, par définition, sur une même ligne (comme AR) issue du point A.

D'après cela, l'ordre d'une courbe transformée se déduit aisément de l'ordre de la courbe primitive. Celle-ci, par exemple, étant de l'ordre n, rencontre toute droite comme AR en n points p qui donnent lieu sur cette même ligne à n points p' de la transformée; mais de plus, la courbe primitive rencontre aussi la corde de contact en n points qui donnent lieu pour la transformée à un point multiple de l'ordre n en A. Ainsi, la transformée a $2n$ rencontres avec toute ligne issue du point A; donc elle est de l'ordre $2n$, et on verra aisément que les points B et C lui sont, comme A, des points multiples dont la multiplicité est d'ordre n.

J'omets les exceptions qui peuvent résulter du passage de la courbe primitive par l'un de ces trois points. Il suffit de dire qu'ils sont analogues aux trois points principaux du tableau de la projection gauche (*).

Mais outre que la réciprocité ne fait pas naître ici des points principaux qui soient particuliers à la figure primitive, j'observerai que dans la méthode des rayons réci-

---

(*) On remarquera que, si le point A est intérieur à la conique, les deux points B et C sont imaginaires.

proques (simple ou généralisée), les points de la conique fondamentale sont à eux-mêmes leurs conjugués, et possèdent cette propriété à l'exclusion de tous les autres points de la figure. Dans la transformation gauche, les points de l'axe de transformation sont à eux-mêmes leurs conjugués, et, hors de cette ligne, il y a un point, un seul point, doué de la même propriété : c'est le point de rencontre de AA′ avec BB′.

C'est ici une différence essentielle; car la conique fondamentale de l'autre méthode ne saurait donner lieu parmi ses variétés à cet ensemble : *une droite et un point*.

D'ailleurs, les points conjugués p et p' de la *fig.* 2 sont toujours en collinéation avec un même point A. Or, on trouve bien dans la transformation gauche (*fig.* 1) que le conjugué d'un point de AA′ est sur cette même ligne AA′, et que le conjugué d'un point de BB′ est aussi sur BB′. Il faudrait donc, pour pouvoir affirmer la coïncidence des deux méthodes, que les points conjugués O et O′ fussent en collinéation avec le point γ, rencontre de AA′ et BB′. Ainsi, les deux triangles AOB, A′O′B′, auraient leurs sommets de même nom en collinéation avec un même point; mais alors il faudrait, d'après un théorème bien connu, que les points l et l' fussent confondus en un seul, c'est-à-dire que les deux côtés homologues AB et A′B′ se rencontrasssent sur la droite $\alpha\beta$ qui joint les rencontres (AO, A′O′) et (BO, B′O′). Or cela n'est pas admissible, vu l'indépendance essentielle des quatre points A, A′, B, B′, relativement à la droite ll'.

XV. *Explication de l'analogie des deux méthodes*.— Après avoir établi surabondamment que les deux modes de transformation sont bien distincts, je dirai que leur propriété commune, de doubler l'ordre des courbes transformées avec apparition constante de trois points mul-

tiples, tient manifestement à ce que telle est la loi générale des transformations où un point correspond à un point unique, et réciproquement.

C'est ce que M. Magnus a démontré à l'aide des formules générales que j'ai rapportées précédemment. J'ajoute que par ces mêmes formules on trouvera sans difficulté que, généralement, il y a dans ces sortes de transformation quatre points qui sont à eux-mêmes leurs propres transformés, mais que, sous des conditions particulières qui sont inconciliables entre elles, ces points peuvent être en nombre infini :

1° Sur *une conique quelconque*, ce qui correspond à la méthode de M. Hirst;

2° Sur *une droite accompagnée d'un point*, ce qui correspond à la transformation gauche.

Nota. — On vient de voir, en réalisant la *transformation gauche* dans le plan de la figure primitive, qu'il n'existe, en dehors de l'axe de transformation, qu'un seul point qui soit à lui-même son transformé. Ce résultat, qui s'explique par les formules générales de M. Magnus, et qui est décisif pour l'objet du présent article, se voit très-facilement par la *projection gauche* elle-même. En effet, si le point O', projection du point O, est tel, qu'après le rabattement du tableau sur le plan primitif ces deux points coïncident, il est manifeste que la ligne OO' doit être perpendiculaire au plan qui partage en deux également l'angle dièdre du plan primitif et du tableau. Cependant cette même ligne rencontre à la fois les deux directrices; elle est donc l'intersection des deux plans qui projettent orthogonalement ces mêmes directrices sur ce plan bissecteur. Or la détermination d'une telle ligne est unique. Donc, etc.

NOTE SUR LES LIGNES D'OMBRE ET D'OMBRE PORTÉE;

Par M. Ossian BONNET.

Considérons une surface à courbures opposées Σ et circonscrivons à cette surface un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'une des asymptotes AS de l'indicatrice relative au point A. On sait que la courbe de contact passera par le point A et y sera tangente à la ligne AS; que la courbe d'ombre portée, c'est-à-dire l'intersection du cylindre circonscrit avec la surface Σ, passera aussi par le point A et y aura même tangente AS; enfin on peut ajouter que les plans osculateurs en A des deux courbes d'ombre et d'ombre portée se confondent avec le plan tangent en A à la surface Σ. Tous ces résultats sont bien connus et servent en Géométrie descriptive pour la détermination des points remarquables auxquels on a donné le nom de *points de passage*; mais on n'a point encore déterminé, que je sache, les rayons de courbure et de torsion au point A des deux lignes d'ombre et d'ombre portée dont il s'agit. Or, si l'on appelle ρ_0 et r_0 les rayons de courbure et de torsion au point A de la ligne asymptotique tangente à AS (j'ai déterminé ρ_0 en fonction des rayons de courbure principaux et des dérivées de ces rayons de courbure dans une Note insérée au tome IV, p. 267, de ce journal; quant à r_0, il est égal à $\sqrt{-RR'}$, c'est-à-dire à l'inverse de la courbure de Gauss), ρ et r les rayons de courbure et de torsion de la ligne d'ombre, ρ_1 et r_1 les rayons de courbure et de torsion de la ligne d'ombre portée, on trouve, soit par le calcul, soit

par des considérations simples de Géométrie infinitésimale,

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0, \quad r = \frac{1}{2}r_0,$$

$$\rho_1 = 2\rho_0 \quad r_1 = -r_0.$$

SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS SUR LA SURFACE DE LA SPHÈRE;

Par M. JARRIGE,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Soient A et B deux points situés sur la surface de la sphère, AB l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui passe par ces deux points, et M un point pris sur AB. Du point A comme pôle, avec le rayon sphérique AM, je décris un petit cercle; du point B comme pôle, avec le rayon BM, je décris un autre petit cercle. Ces petits cercles se touchent au point M et sont extérieurs l'un à l'autre, puisque l'arc AB est moindre qu'un demi grand cercle.

Cela posé, je dis que le plus court chemin de A en B passe par le point M. En effet, tout chemin ApqB ne passant pas par le point M coupe les petits cercles en p et q; or le plus court chemin de A en p est égal au plus court chemin de A en M (lemme connu), le plus court chemin de B en q est égal au plus court chemin de B en M (même lemme). Donc le chemin ApqB surpasse le plus court chemin de A en M plus le plus court chemin de M en B d'une quantité au moins égale au plus court

chemin de p en q. Donc le plus court chemin de A en B passe par le point M; donc il se confond avec AB, puisque M est un point quelconque de AB.

EXPRESSIONS GÉNÉRALES DU RAYON ET DE LA SURFACE DES POLYGONES CIRCONSCRIPTIBLES;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au lycée impérial de l'île de la Réunion.

1. La question que nous nous proposons de résoudre est la suivante :

Un polygone de n côtés est circonscrit à un cercle; on connaît les tangentes α, β, γ, δ, ε,... menées des différents sommets du polygone à la circonférence : calculer, en valeur de ces tangentes, le rayon du cercle et la surface du polygone.

2. Désignons par $2A$, $2B$, $2C$,... les angles du polygone respectivement compris sous les tangentes (α, α), (β, β), (γ, γ),..., nous avons l'égalité

$$A + B + C + \ldots = (n - 2)\frac{\pi}{2}.$$

On sait que si n est pair,

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \pm \frac{1 - c_2 + c_4 - \ldots}{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots},$$

et si n est impair,

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \pm \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots},$$

où c_1 désigne la somme des cotangentes, c_2 la somme des

produits de ces cotangentes deux à deux, et ainsi de suite.

Or, lorsque n est pair, $(n - 2)\frac{\pi}{2}$ exprime un nombre pair d'angles droits, et l'on a

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \infty,$$

ce qui exige que

$$c_1 - c_3 + c_5 - \ldots = 0;$$

et lorsque n est impair, $(n - 2)\frac{\pi}{2}$ représente un nombre impair d'angles droits, et il vient

$$\cot(A + B + C + \ldots) = 0,$$

ce qui donne la même relation. *On a* donc, *pour les angles d'un polygone fermé quelconque, convexe, à angles rentrants ou étoilé, la formule générale*

$$\text{(I)} \qquad c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \ldots = 0.$$

3. *Rayon du cercle inscrit.* — Représentons ce rayon par R; nous avons

$$\cot A = \frac{\alpha}{R}, \quad \cot B = \frac{\beta}{R}, \quad \cot C = \frac{\gamma}{R}, \ldots.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (I), nous aurons l'équation

$$\frac{S_1}{R} - \frac{S_3}{R^3} + \frac{S_5}{R^5} - \frac{S_7}{R^7} + \ldots = 0,$$

où nous désignons par S_1 la somme des quantités α, β, γ, δ, ε,...; par S_3 la somme de leurs produits trois à trois, etc.

Deux cas sont à considérer ici :

1° Si n est impair, le dernier terme sera $\frac{S_n}{R^n}$, et l'équa-

tion pourra s'écrire

(II) $$S_1 R^{n-1} - S_3 R^{n-3} + S_5 R^{n-5} - \ldots = 0.$$

2° Si n est pair, le dernier terme sera $\frac{S_{n-1}}{R^{n-1}}$ et l'équation se réduira à

(III) $$S_1 R^{n-2} - S_3 R^{n-4} + S_5 R^{n-6} - \ldots = 0.$$

Telles sont les deux premières relations que nous nous proposons d'établir.

4. Remarque. — Lorsqu'on permute entre eux les segments tangentiels $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, les coefficients S_1, S_3, $S_5, \ldots$ ne changent pas; les équations (II) et (III) donnent donc toujours les mêmes valeurs pour R. Donc :

Lorsqu'un polygone est circonscriptible à un cercle, quel que soit l'ordre dans lequel on dispose la suite des segments tangentiels des côtés, le nouveau polygone sera encore circonscriptible au même cercle.

5. Applications. — 1° *Triangle :*

(1) $$R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

2° *Quadrilatère :*

(2) $$R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

6. *Surface du polygone.* — En appelant Q l'aire du polygone circonscriptible, nous avons

$$Q = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) R = S_1 R,$$

d'où

$$R = \frac{Q}{S_1}.$$

Substituons cette valeur dans les deux équations (II) et (III) et effectuons : nous obtenons les nouvelles équations

$$\text{(IV)}\quad Q^{n-1} - S_1 S_3 Q^{n-3} + S_1^3 S_5 Q^{n-5} - \ldots = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair},$$

$$\text{(V)}\quad Q^{n-2} - S_1 S_3 Q^{n-4} + S_1^3 S_5 Q^{n-6} - \ldots = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair},$$

qui donnent l'aire du polygone en fonction des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

7. Remarque. — *L'aire est constante, quel que soit l'ordre de succession des segments tangentiels* α, β, γ, δ, ε, ...

8. Applications. — 1° *Triangle :*

$$(5)\qquad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)\,\alpha\beta\gamma}.$$

2° *Quadrilatère :*

$$(6)\qquad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)}.$$

MÉTHODE DE CAUCHY POUR LE CALCUL DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES DES ÉQUATIONS (*).

177. Cauchy a publié, dans ses anciens *Exercices de Mathématiques* (4e année, p. 103), une méthode nouvelle et fort élégante pour obtenir la valeur d'une fonc-

---

(*) Extrait du *Cours d'Algèbre supérieure* par M. J.-A. Serret, membre de l'Institut, etc.; 3e édition, 1866, t. I, p. 391. L'ouvrage aura deux volumes. Aussitôt que le second aura paru, nous rendrons compte de cette troisième édition qui se distingue des deux précédentes par d'importantes améliorations. P.

tion symétrique et entière des racines d'une équation. Cette méthode consiste à éliminer successivement de l'expression de la fonction symétrique qu'on veut évaluer chacune des racines de l'équation proposée; elle repose sur la proposition suivante :

Soit V une fonction symétrique et entière des racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$ d'une équation

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

que nous représenterons aussi, pour abréger, par

$$X = 0;$$

et supposons qu'ayant éliminé de l'expression de V, par un moyen quelconque, toutes les racines excepté a, on ait mis la valeur de cette fonction sous la forme d'un polynôme entier et rationnel ordonné par rapport aux puissances de a, que l'on ait, par exemple,

$$V = A_0 a^{\mu} + A_1 a^{\mu - 1} + \ldots + A_{\mu - 1} a + A_{\mu},$$

A_0, A_1, etc., étant des quantités composées rationnellement avec les coefficients de l'équation proposée, je dis que si l'on divise cette expression de V par le polynôme

$$A = a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1} a + p_m,$$

obtenu en remplaçant x par a dans X, le reste de la division ne contiendra pas a, et sera précisément la valeur de la fonction V.

En effet, si Q et R désignent le quotient et le reste de la division de V par A, on aura $V = AQ + R$, et comme A est nul,

$$V = R.$$

D'ailleurs, ce reste R est au plus du degré $m - 1$ en a;

nous le représenterons par

$$q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1},$$

et l'on aura

$$V = q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

Mais V étant une fonction symétrique, on peut changer les lettres a et b l'une en l'autre, ainsi que a et c, etc.; et comme, par ces changements, q_0, q_1, etc., conservent leurs valeurs, il s'ensuit que l'équation

$$q_0 x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + \ldots + q_{m-2} x + (q_{m-1} - V) = 0$$

sera satisfaite en remplaçant x par l'une quelconque des m racines $a, b, \ldots, k, l$; ce qui est impossible, à moins que les coefficients ne soient tous nuls, car cette équation n'est que du degré $m-1$; on aura donc, en particulier,

$$q_{m-1} - V = 0$$

ou

$$V = q_{m-1},$$

comme nous l'avions annoncé.

La démonstration précédente suppose que les m racines $a, b, c, \ldots, k, l$ sont inégales; mais les conclusions précédentes ne subsistent pas moins, si quelques-unes de ces racines sont égales entre elles. Nous emploierons, pour justifier cette assertion, un raisonnement dont on fait un fréquent usage en analyse.

Si l'équation $X = 0$ a des racines égales, on considérera d'abord à sa place une équation $X_1 = 0$, dont toutes les racines seront inégales, et qu'on obtiendra en faisant subir des modifications insensibles aux coefficients de X; par exemple, si l'équation $X = 0$ a trois racines égales à

a, et que les autres racines soient différentes, on prendra

$$X_1 = \frac{X(x-a-h)(x-a-h')}{(x-a)^2}.$$

Le polynôme X_1 ne diffère de X qu'en ce que deux des trois racines égales à a sont remplacées par $a+h$ et $a+h'$: on voit aisément, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, comment on devrait choisir le polynôme X_1, si, outre les trois racines égales à a, l'équation proposée avait plusieurs racines égales à b, à c, etc. Cela posé, substituant l'équation $X_1 = 0$ à $X = 0$, et conservant d'ailleurs les notations précédentes, on arrivera à l'équation

$$V = q_{m-1},$$

et cette équation aura lieu, quelque petites que soient les quantités h, h', etc.; elle aura donc lieu aussi à la limite, quand on fera $h = 0$, $h' = 0$, etc.

178. Voici maintenant la méthode donnée par Cauchy pour calculer la valeur d'une fonction symétrique et entière V des racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$ de l'équation

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

Divisons X par $x-a$, et désignons par X_1 le quotient; divisons de même X_1 par $x-b$, et désignons par X_2 le quotient, puis X_2 par $x-c$, et soit X_3 le quotient, et continuons ainsi d'enlever de X tous les facteurs linéaires jusqu'à $x-k$ inclusivement, en sorte que X_{m-1} ne contiendra plus que le seul facteur $x-l$. Cela posé, considérons les m équations

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_{m-1} = 0.$$

La première n'est autre que la proposée, et elle a pour racines $a, b, c, \ldots, k, l$; la seconde a pour racines $b, c, \ldots,$

k, l, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière en fonction de a et des coefficients de la proposée; la troisième a pour racines $c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière en fonction de b et des coefficients de la précédente, c'est-à-dire en fonction de a, b et des coefficients de la proposée; et, en général, les coefficients de l'une quelconque de ces équations sont exprimés sous forme entière en fonction des coefficients de la proposée et des racines qui n'appartiennent pas à l'équation que l'on considère. Désignons enfin par A la valeur de X pour $x = a$, par B la valeur de X_1 pour $x = b$, par C celle de X_2 pour $x = c$, et ainsi de suite, en sorte que I sera la valeur de X_{m-3} pour $x = i$, K celle de X_{m-2} pour $x = k$, et L celle de X_{m-1} pour $x = l$; on aura

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots, \quad I = 0, \quad K = 0, \quad L = 0.$$

Cela posé, V est une fonction symétrique, non-seulement des racines de l'équation $X = 0$, mais aussi des racines de l'une quelconque des équations

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \ldots, \quad X_{m-3} = 0, \quad X_{m-2} = 0, \quad X_{m-1} = 0.$$

Nous allons faire voir comment, en s'appuyant sur cette remarque, on peut, à l'aide du théorème fondamental démontré plus haut, éliminer successivement chaque racine de l'expression de V.

D'abord l'équation $L = 0$, où l entre au premier degré, permet de chasser immédiatement l de l'expression de V. Considérant alors V comme fonction symétrique des deux racines k et l de l'équation $X_{m-2} = 0$, dont l'une l est déjà éliminée, on l'ordonnera par rapport à k, et on la divisera par K, conformément à ce qui a été dit plus haut; le reste de la division ne contiendra pas k et sera la valeur de V débarrassée des racines k et l. On considérera alors V comme fonction symétrique des trois racines i, k, l

de l'équation $X_{m-3} = 0$, dont les deux dernières n'entrent plus dans son expression, et l'ayant ordonnée par rapport à i, on la divisera par I à l'effet d'éliminer i; le reste de la division ne contiendra pas i et sera la valeur de V débarrassée des trois racines i, k, l. On continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait éliminé de chacune des racines a, b, c,..., i, k, l; on aura alors la valeur de cette fonction exprimée par les coefficients de l'équation proposée.

Il importe de remarquer que l'expression définitive de V s'obtient par de simples divisions, et que les premiers termes des polynômes A, B, C,..., I, K, L, qui servent successivement de diviseurs, ont tous l'unité pour coefficient : par conséquent, ces divisions n'introduiront aucun dénominateur; en sorte que si l'expression primitive de V est entière, non-seulement par rapport aux racines a, b, c,..., i, k, l, qui y entrent symétriquement, mais encore par rapport aux coefficients p_1, p_2, etc., qui peuvent eux-mêmes y figurer, l'expression définitive de V sera aussi entière par rapport à ces coefficients; enfin, si ces mêmes coefficients sont des nombres entiers, V sera pareillement un nombre entier. Ce résultat important, que nous n'avions pas établi complétement par notre première méthode, mais qui résulte immédiatement de la méthode de Waring, se déduit aussi, comme on voit, de la méthode de Cauchy.

Application de la méthode de Cauchy à un exemple.

179. Nous allons appliquer la méthode de Cauchy à la détermination du produit des carrés de toutes les différences des racines d'une équation donnée, prises deux à deux. Cet exemple suffira pour montrer comment on peut, par des artifices convenables, simplifier dans certains cas l'emploi de la méthode.

Soient toujours $a, b, c, \ldots, k, l$ les m racines de l'équation

$$(1) \quad X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0;$$

soient aussi

$$V = (a - b)^2 (a - c)^2 \ldots (k - l)^2$$

et

$$V_1 = (b - c)^2 (b - d)^2 \ldots (k - l)^2;$$

V sera le produit des carrés des différences des racines de l'équation (1), prises deux à deux, et V_1 le produit des carrés des différences des racines de l'équation

$$\frac{X}{x - a} = 0,$$

ou

$$(2) \quad \begin{array}{r|r|l} x^{m-1} + p_1 & x^{m-2} + p_2 & x^{m-3} + \ldots + p_{m-1} = 0, \\ + a & + p_1 a & \qquad\qquad\quad + p_{m-2} a \\ & + a^2 & \qquad\qquad\quad + \ldots\ldots\ldots \\ & & \qquad\qquad\quad + a^{m-1}. \end{array}$$

Cela posé, on a

$$V = V_1 (a - b)^2 (a - c)^2 \ldots (a - k)^2 (a - l)^2.$$

Mais le produit $(a - b)(a - c)\ldots(a - k)(a - l)$ est égal (n° 49) à la valeur que prend la dérivée du polynôme X pour $x = a$, c'est-à-dire égal à

$$m a^{m-1} + (m - 1) p_1 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1};$$

donc on aura

$$V = V_1 [m a^{m-1} + (m - 1) p_1 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1}]^2.$$

D'après cela, si nous admettons qu'on sache former la valeur de la fonction V pour une équation du degré $m - 1$, on pourra également trouver la valeur de cette fonction pour une équation du degré m. Effectivement, par hypo-

thèse, on sait exprimer la valeur de V_1 par les coefficients de l'équation (2), c'est-à-dire en fonction de a et des coefficients de la proposée; donc la fonction V pourra elle-même être mise sous la forme d'un polynôme ordonné par rapport aux puissances de a, et, en divisant ce polynôme par le premier membre de l'équation proposée, dans lequel on aura remplacé x par a, le reste de la division donnera la valeur cherchée de V. Or on sait calculer la fonction de V pour une équation du deuxième degré; on pourra donc calculer cette fonction pour l'équation du troisième degré, puis pour celle du quatrième, et ainsi de suite.

Cas de l'équation du troisième degré. — L'équation proposée est

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} V &= (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2, \\ V_1 &= (b-c)^2, \\ V &= V_1(a-b)^2(a-c)^2; \end{aligned}$$

V_1 étant relatif à l'équation du deuxième degré

$$x^2 + \left.\begin{array}{r} p \\ +a \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{r} q \\ +pa \\ +a^2 \end{array}\right. = 0.$$

On a immédiatement

$$V_1 = (p+a)^2 - 4(q + pa + a^2) = -3a^2 - 2pa + (p^2 - 4q);$$

d'ailleurs

$$(a-b)(a-c) = 3a^2 + 2pa + q,$$

par suite,

$$\begin{aligned} V &= (-3a^2 - 2pa + p^2 - 4q)(3a^2 + 2pa + q)^2 \\ &= -27a^6 - 54pa^5 \left.\begin{array}{r} -27p^2 \\ -54q \end{array}\right| a^4 \left.\begin{array}{r} +4p^3 \\ -72pq \end{array}\right| a^3 \left.\begin{array}{r} +4p^4 \\ -18p^2q \\ -27q^2 \end{array}\right| a^2 \left.\begin{array}{r} +4p^3q \\ -18pq^2 \end{array}\right| a \left.\begin{array}{r} +p^2q^2 \\ -4q^3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Divisant cette valeur de V par $a^3 + pa^2 + qa + r$, on trouve pour quotient

$$-27a^3 - 27pa^2 - 27qa + (4p^3 + 27r - 18pq),$$

et pour reste,

$$-4q^3 - 27r^2 + 18pqr + p^2q^2 - 4p^3r,$$

ce qui est précisément la valeur de V que nous cherchons. On trouvera dans le Chapitre suivant une méthode plus expéditive pour résoudre la même question.

RAPPORT DU GÉNÉRAL SABINE,

Président de la Société Royale de Londres,

SUR LA MÉDAILLE DE COPLEY ACCORDÉE A M. CHASLES.

Note du Rédacteur. — La médaille de Copley est la plus haute distinction que la Société de Londres puisse accorder à un savant, et parmi ceux qui l'ont obtenue, on ne trouve que les hommes du premier mérite. Poisson, Sturm et M. Chasles sont, à notre connaissance, les seuls géomètres français qui l'aient obtenue.

Nous croyons être agréables à nos lecteurs en donnant le Rapport lu à la Société Royale sur les travaux de M. Chasles qui lui ont valu cette récompense exceptionnelle. On y verra combien les œuvres de notre illustre compatriote sont justement appréciées en Angleterre. L'organe de la Société Royale, devançant la postérité, n'hésite pas à placer la nouvelle méthode de M. Chasles au rang des plus belles découvertes de notre siècle. Un tel hommage honore et l'Académie qui le décerne et le savant qui le reçoit.

La médaille de Copley, d'un module un peu plus grand que notre pièce de cinq francs, est en or. Sur la face se trouve une figure personnifiant la Science, entourée des attributs des sciences et des arts et offrant une couronne; au-dessus : G. COPLEY, BAR., DIGNISSIMO; au-dessous : MICHEL CHASLES, 1865. Le revers porte les armes de la Société Royale, avec ces inscriptions : au-dessus, *Societatis Reg. Londini*; au-dessous, *Nullius in verba*, expression abrégée de la devise de la Société (*Nullius in verba jurare magistri*).

La traduction qu'on va lire est tirée du journal *les Mondes* (*), rédigé par M. l'abbé Moigno. Nous l'avons revue sur le texte anglais. P.

« Les travaux historiques et les recherches originales de M. Chasles ont rempli une période d'environ quarante années. Pendant ce long intervalle de temps, il a consacré toute son énergie, avec une persévérance rarement égalée, à la restauration et à l'extension des méthodes purement géométriques que l'antiquité nous avait léguées, dont le développement avait été arrêté pendant le moyen âge, et dont l'utilité avait été momentanément éclipsée par la brillante découverte de la Géométrie des coordonnées due à Descartes. Dans son *Histoire*, bien connue, *de l'origine et du développement des méthodes en Géométrie*, publiée en 1837 et couronnée par l'Académie de Bruxelles, M. Chasles expose comme il suit ce qui de fait est devenu l'objet principal des travaux de sa vie : « ... Nous avons » pensé qu'il ne pouvait être qu'utile de montrer, autant » que nos faibles moyens nous le permettaient, que, dans

(*) *Les Mondes*, Revue hebdomadaire des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie. Paris, J. Rothschild, éditeur. Prix : 25 fr. par an. Cette Revue, qui forme trois volumes chaque année, comprend déjà neuf volumes. Le dixième commence une nouvelle série.

» une multitude de questions, les doctrines de la pure » Géométrie offrent souvent, et dans une foule de questions, cette voie aisée et naturelle qui, pénétrant jusqu'à l'origine des vérités, met à nu la chaîne mystérieuse qui les unit entre elles, et les fait connaître » individuellement de la manière la plus lumineuse et la » plus complète (*). »

» Le travail achevé que nous venons de citer est unique en son genre : il est notre plus haute autorité dans les matières qui touchent à l'histoire de la Géométrie, science dont il trace avec soin les développements successifs, depuis le temps de Thalès et de Pythagore jusqu'aux premières années de ce siècle. Quoiqu'il ne s'offre à nous que comme un simple aperçu, il représente cependant une vaste quantité de recherches historiques, et il est en outre enrichi de nombreuses notes renfermant les résultats d'investigations originales importantes.

» Dans l'année 1846, la fondation d'une chaire de Géométrie moderne au sein de la Faculté des Sciences de Paris fut arrêtée en principe, et M. Chasles fut chargé de donner lui-même l'enseignement créé, en très-grande partie, par ses propres recherches. Il commença ainsi à exercer sur les jeunes géomètres de la France cette influence personnelle qui n'a pas cessé depuis, et dont on trouve la preuve dans toutes leurs productions. Un autre résultat de cette nomination, dont les géomètres de toutes les nations ont grandement profité, fut la publication, en 1852, de son *Traité de Géométrie supérieure*, ouvrage dans lequel les trois principes fondamentaux de la Géométrie pure sont pleinement et systématiquement exposés pour la première fois. Ces principes embrassent les théories modernes des rapports anharmoniques, des

---

(*) *Aperçu historique*, p. 3.

divisions et des faisceaux homographiques, et de l'involution. Le rapport anharmonique est en réalité un rapport de deux rapports, qui ont lieu entre deux couples de segments déterminés par quatre points quelconques d'une ligne donnée. On peut dire que toute la Géométrie moderne est fondée sur une propriété particulière de ce rapport, la propriété de n'être nullement altéré dans sa projection. Les divisions homographiques consistent en deux séries de points, situés sur une même ligne droite ou sur deux lignes droites différentes, qui se correspondent, de telle sorte que le rapport anharmonique de quatre points quelconques d'une série soit égal au rapport anharmonique des points correspondants de l'autre série. Enfin, deux séries homographiques, sur une même ligne droite, sont dites former une involution lorsque, à un point quelconque de cette ligne, correspond un seul et même point, quelle que soit celle des deux séries à laquelle le premier point soit censé appartenir. Ordinairement il y a dans une semblable involution deux points tels, que chacun d'eux coïncide avec le point correspondant; par un pur changement de position, toutefois, l'existence actuelle de ces deux points doubles peut être détruite, toutes les autres propriétés de l'involution restant intactes. Cette contingence a fait naître un mode de langage de la plus grande utilité en Géométrie; les deux points *doubles* sont dits *réels* dans un cas, *imaginaires* dans l'autre. Nous sommes principalement redevables à M. Chasles de l'introduction non déguisée et philosophique en Géométrie des points et des lignes imaginaires.

» Le terme de rapport anharmonique, aujourd'hui universellement employé, est dû à M. Chasles; mais ce rapport lui-même paraît avoir été connu de Pappus, l'éminent géomètre d'Alexandrie, au IVe siècle. M. Chasles,

en effet, a montré que ce rapport formait probablement le trait essentiel (*essential feature*) de ce fameux livre des Porismes, que l'on sait avoir été écrit par Euclide, mais qui n'était connu que par des inductions de nature très-vague, transmises jusqu'à nous dans les Collections mathématiques de Pappus. Robert Simson, de Glasgow, le célèbre traducteur des Éléments d'Euclide, est le premier qui ait résolu d'une manière satisfaisante l'énigme relative à la nature réelle des Porismes, et qui ait réussi à restaurer en partie les trois livres perdus. M. Chasles est le premier qui les ait restaurés complétement; et il l'a fait dans un ouvrage qui, de l'aveu de tous, est à la fois une précieuse addition à l'histoire de la Géométrie, et le modèle d'une divination aussi ingénieuse que philosophique.

» M. Chasles a contribué à l'avancement de la Géométrie pure, non-seulement par les trois ouvrages complets auxquels nous avons déjà fait allusion, mais encore par la publication d'un grand nombre de Mémoires de moindre étendue. Les suivants, qui ne sont pas les seuls dignes de remarques, méritent d'être signalés.

» Le Mémoire *sur les projections stéréographiques* convertit une méthode employée primitivement à la construction des cartes en un puissant instrument de transformation géométrique. Deux savants Mémoires *sur les cônes du second ordre* et *sur les coniques sphériques*, grâce à la traduction faite en 1841 par M. le Dr Graves, de Trinity College (Dublin), a exercé une influence directe sur la Géométrie pure dans notre pays. Le Mémoire *sur le principe de correspondance entre deux objets variables* nous a mis en possession d'un principe de la plus grande utilité dans les recherches de Géométrie supérieure. Dans plusieurs autres Mémoires, la méthode d'engendrer les courbes d'ordre supérieur par les faisceaux

homographiques des courbes d'ordre inférieur est amenée à sa perfection, et conduit à de nouvelles propriétés des courbes planes du troisième et du quatrième ordre. La théorie des courbes non planes, spécialement de celles des troisième et quatrième ordres, a son origine, pour la plus grande partie, dans les Mémoires de M. Chasles, et la science moderne de la Cinématique lui doit deux Mémoires remarquables sur les déplacements finis et infiniment petits des corps solides. Le problème de l'attraction des ellipsoïdes, devenu célèbre par les recherches de Newton, de Maclaurin, d'Ivory, de Legendre, de Lagrange, de Laplace, a reçu de M. Chasles la première solution synthétique complète. C'est dans ce problème qu'apparut pour la première fois l'idée de surfaces confocales du second ordre dont la théorie a été depuis si grandement perfectionnée.

» Le premier volume d'un quatrième ouvrage de M. Chasles, *Traité des Sections coniques*, a paru cette année (1865); c'est une suite à la *Géométrie supérieure*, et les trois principes que nous avons rappelés y ont trouvé leur champ d'application le mieux approprié. On attend avec d'autant plus d'intérêt l'apparition du second volume de ce Traité, qu'il doit contenir l'exposition complète des admirables recherches sur les sections coniques par lesquelles M. Chasles vient de couronner sa carrière. Ces recherches, dont un court aperçu a déjà paru l'année dernière dans les *Comptes rendus*, nous a mis en possession d'une méthode entièrement nouvelle, dont la nature et l'utilité peuvent être rendues intelligibles, même à ceux qui n'ont pas fait une étude spéciale de la Géométrie moderne.

» Cinq conditions suffisent en général pour la détermination ou la construction des courbes appelées communément *sections coniques*, et dont l'hyperbole, la parabole et l'ellipse sont des espèces. La nature de ces cinq

conditions peut être telle, cependant, qu'elles puissent être satisfaites par plus d'une conique. Par exemple, quoiqu'il ne puisse passer qu'une seule conique par cinq points donnés, il existe deux coniques distinctes passant chacune par quatre points donnés, et touchant une ligne donnée. De là surgit cette question générale importante : *Combien de coniques satisfont à cinq conditions données?* Par la nouvelle méthode de M. Chasles, nous sommes en état de répondre avec une grande facilité à cette question, inabordable jusqu'ici. Partant des cas élémentaires où les cinq conditions sont les plus simples possible, et consistent seulement à passer par des points ou à toucher des droites, il remplace graduellement ces conditions par de plus complexes, et arrive enfin à la formule simple et symétrique qui répond pleinement à la question posée ci-dessus. En voyant combien sont nombreuses les questions sur les coniques, qu'on peut ramener à la question unique résolue par M. Chasles, nous pouvons affirmer sans exagération que, dans cette seule formule, se trouve condensée virtuellement la théorie entière des sections coniques.

» Cette méthode a reçu de son éminent inventeur le nom très-juste de *substitution géométrique*. Elle comprend la considération des propriétés du système de coniques (en nombre infini) qui satisfont à *quatre* conditions communes. Un semblable système est défini, pour la première fois, d'une manière strictement analogue à celle par laquelle on partage les courbes en ordres et en classes. Nous avons seulement à connaître : *premièrement*, combien de coniques du système passent par un point pris arbitrairement; *secondement*, combien de ces coniques touchent une droite donnée. Ces deux nombres ou *caractéristiques*, comme on les appelle, une fois trouvés, toutes les propriétés du système de coniques sont

immédiatement exprimables. Par exemple, la somme de deux fois la première caractéristique et de trois fois la seconde, nous donne l'ordre de la courbe sur laquelle sont situés les sommets de toutes les coniques du système.

» Cette nouvelle méthode des caractéristiques a déjà été appliquée à des courbes d'ordres supérieurs, comme aussi à des surfaces, et si l'on considère la vaste étendue du nouveau champ ouvert ainsi à nos investigations, il est très-probable que, considérée comme instrument de recherche en Géométrie pure, la méthode de M. Chasles peut supporter la comparaison avec toute autre découverte de ce siècle. »

S'adressant alors à M. le professeur Miller, le Général Sabine lui a dit : « M. Chasles n'ayant pas pu venir recevoir en personne la médaille qui lui a été décernée, j'ai à vous prier, comme notre secrétaire pour l'étranger, de la recevoir pour lui et de la lui transmettre. Assurez-le de l'estime très-haute que nous faisons, en cette contrée, de ses travaux dans une branche des recherches mathématiques peu suivie et peu encouragée depuis plus d'un siècle. »

CORRESPONDANCE.

M. Y., de Bruxelles. — « A la demande d'un abonné de Belgique, la rédaction des *Nouvelles Annales* s'est constituée en tribunal d'appel pour réformer le jugement d'une cause perdue en première instance, devant un jury scientifique belge. Permettez-moi, Monsieur, de venir à mon tour, dans l'intérêt de la vérité, vous exposer exactement et sans réticences les faits de cette cause,

présentés par l'appelant sous un point de vue un peu trop approprié à sa thèse.

» Le susdit abonné vous dénonce deux faits : 1° l'annulation de la solution mentionnée; 2° les motifs allégués à l'appui de cette mesure rigoureuse. Il vous donne ces faits comme certains, comme authentiques et officiels; de plus, il les donne de telle manière, que l'avis qu'il sollicite de vous devait pour ainsi dire forcément concorder avec sa propre opinion.

» Malheureusement pour les conclusions de votre correspondant, ses prémisses reposent sur une base excessivement fragile. Vous allez en juger, Monsieur le Rédacteur. Le concours spécial de Mathématiques en Belgique consiste en une double épreuve, l'une écrite, l'autre orale; à cette dernière sont appelés seulement les élèves qui ont obtenu dans l'épreuve écrite au moins les deux tiers des points attachés à un travail parfait. L'épreuve orale est publique; au contraire, les délibérations du jury sur le travail écrit des élèves sont absolument secrètes, et les intéressés n'en connaissent que le résultat, c'est-à-dire les noms des élèves désignés pour le concours oral, ainsi que le nombre de points obtenus par ces derniers. D'où il suit que les assertions de M. X. ou sont de pure invention, ou bien ont leur source dans une communication confidentielle faite par un membre du jury, et livrée indiscrètement à la publicité par M. X. Dans tous les cas, il est impossible de contrôler l'exactitude de ces assertions, mais on ne peut admettre qu'un membre du jury ait fait une communication dans le sens de celle que rapporte votre correspondant. Comment croire, en effet, qu'un membre du jury a pu s'octroyer à lui-même et donner à ses collègues, ainsi qu'au gouvernement, un brevet de ridicule et de sottise, en soutenant, comme le prétend M. X., qu'une question a été faite aux élèves pour avoir réponse à une

autre question, qui n'est point indiquée, et qui n'a pas même, de l'aveu de M. X., un rapport direct et nécessaire avec la question proposée? Voyez-vous, Monsieur, le gouvernement et le jury transformés en une sorte d'oracle qui

> . . . . Jamais ne se laisse comprendre;
> On l'entend d'autant moins que plus on croit l'entendre?

Voyez-vous les inspecteurs de l'enseignement, les savants, les professeurs qui préparent les questions ou jugent les réponses, s'ingéniant à poser des rébus aux jeunes gens, sous prétexte de concours de Mathématiques?

» Admettons cependant qu'un concurrent ait donné la solution mentionnée par M. X. et que le jury l'ait comptée comme nulle : pareille décision peut-elle se justifier? C'est ce que je vais examiner brièvement.

» Cette solution, dit M. X., me paraît simple et irréprochable. Oui, si l'on a égard seulement aux termes de l'énoncé, *tel qu'il est indiqué par M. X.*, et abstraction faite de toute autre considération; et même à ce point de vue elle contient quelque chose de tout à fait superflu, c'est l'équation du lieu, qui n'est pas du tout demandée et dont cet énoncé ne dit mot. Mais il en est tout autrement pour quiconque est au courant de notre enseignement et connaît les circonstances dans lesquelles la question a été posée. Or, en Belgique, nous n'avons pas, comme en France, l'étude par la Géométrie des courbes usuelles, et le programme prescrit l'emploi exclusif des méthodes algébriques dans l'étude des sections coniques; de sorte que la question du concours était uniquement une question d'*application de l'Algèbre à la Géométrie*. En la proposant aux élèves, on n'avait donc et on ne pouvait avoir qu'un seul but : c'était non pas de faire déterminer, par n'importe quel procédé, le lieu demandé,

mais bien de faire trouver la solution par les procédés de l'Algèbre, et de constater ainsi que les élèves étaient familiarisés avec les méthodes d'investigation particulières à la Géométrie analytique. Voilà ce que personne ne saurait contester, et ce que tout le monde sait ici. Et pour que vous-même, Monsieur le Rédacteur, vous n'ayez aucun doute à cet égard, il me suffira de vous mettre sous les yeux le véritable texte, le texte officiel de la question du concours, texte qui a été *quelque peu* modifié par votre correspondant et dont voici la copie exacte : *Rechercher l'équation du lieu des foyers des lignes du second ordre qui ont une directrice commune et une tangente commune avec le point de contact donné sur la tangente. Discuter l'équation du lieu.*

» En présence de cet énoncé et de ce que je viens de dire, il est évident que la solution mentionnée était insuffisante; il est surtout évident qu'elle avait peu de valeur à côté d'autres solutions obtenues par un emploi judicieux des méthodes analytiques, et qui dénotaient chez leurs auteurs la connaissance approfondie de ces méthodes en même temps que l'aptitude à en faire avec sûreté et promptitude l'application : car c'est là incontestablement ce qui constitue la véritable supériorité scientifique, et non pas la connaissance plus ou moins accidentelle de telle propriété secondaire des figures. »

Note du Rédacteur. — M. Y. se trompe quand il nous accuse de nous être érigé en tribunal. Dieu merci! nous ne sommes coupable d'aucune usurpation de pouvoir. On nous a consulté sur un cas singulier sans être invraisemblable. Nous avons donné notre opinion motivée sur la question de principe, admettant le fait comme une pure hypothèse et sans mettre les personnes en cause. Nous ne pouvons donc avoir eu l'intention d'attaquer ni les sa-

vants de la Belgique ni le gouvernement de ce pays. Il est possible que M. X. ait exagéré dans un sens : M. Y. a peut-être exagéré dans le sens opposé, cela nous est indifférent. Malgré l'opinion de ce dernier, nous croyons que l'exclusion du concours est une peine trop forte contre un candidat qui, après tout, s'est montré intelligent en tirant l'équation du lieu d'une propriété de la courbe.

QUESTIONS.

752. On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle, que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe.

Lieu du pied de la quatrième normale. (DARBOUX.)

753. Si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné, on trouve une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2 = Ax^2 + By^2 + C.$$

Réciproquement, étant donnée une équation de cette forme, peut-on trouver une ellipse ou une hyperbole telles, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole, ces tangentes fassent un angle donné? Le problème a-t-il plusieurs solutions?

(G. DARBOUX.)

754. Soient α, β, γ les milieux des côtés d'un triangle ABC; P le point de rencontre des hauteurs AD, BE, CF; O le centre du cercle circonscrit, dont le rayon $=$ R.

Sur les segments PA, PB, PC; Pα, Pβ, Pγ, on prend les points p, q, r; p', q', r', de telle sorte que

$$\mathrm{P}p = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{PA}, \quad \mathrm{P}q = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{PB}, \quad \mathrm{P}r = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{PC},$$

$$\mathrm{P}p' = \frac{2}{n}\cdot \mathrm{P}\alpha, \quad \mathrm{P}q' = \frac{2}{n}\cdot \mathrm{P}\beta, \quad \mathrm{P}r' = \frac{2}{n}\cdot \mathrm{P}\gamma;$$

et enfin on désigne par p'', q'', r'' les pieds des perpendiculaires abaissées des points p', q', r' sur les hauteurs AD, BE, CF, respectivement. Démontrer que p, q, r; p', q', r'; p'', q'', r'' sont neuf points sur la même circonférence, dont le rayon $= \frac{1}{n}\cdot \mathrm{R}$, et dont le centre est un point M situé sur la ligne PO, de telle sorte que

$$\mathrm{PM} = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{PO} \quad (*).$$

Si on cherche la condition que la circonférence dont il s'agit touche la circonférence inscrite, on aura

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} = 1 + \frac{r^2}{\rho^2},$$

r étant le rayon du cercle inscrit et ρ le rayon du cercle conjugué au triangle. (GRIFFITHS.)

(*) Si l'on pose $n = 2$, on a un théorème bien connu.

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN (Fin)

(voir p. 49);

PAR M. PAINVIN.

13. THÉORÈME IX. — *La $q^{ième}$ polaire d'un plan P_0 relative à la $p^{ième}$ polaire de ce même plan par rapport à la surface primitive est la $(p+q)^{ième}$ polaire de ce plan relative à la surface primitive.*

La $p^{ième}$ polaire du plan P_0 relative à la surface primitive est en effet

$$\Delta_p U = \left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^p U = 0;$$

la $q^{ième}$ polaire du même plan par rapport à la surface $\Delta_p U$ est

$$\Delta_q(\Delta_p U) = 0.$$

Or, d'après l'identité (10) du n° 4,

$$\Delta_q(\Delta_p U) = \Delta_{p+q} U = \left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{p+q} U = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ceci revient à dire que :

La polaire de $s^{ième}$ classe d'un plan est la même, qu'elle soit prise par rapport à la surface ou par rapport à une polaire quelconque du même plan et de classe supérieure à s.

Car la polaire $p^{ième}$ est de la classe $(n-p)$; la $q^{ième}$ polaire relative à la $p^{ième}$ polaire sera de la classe $(n-p)-q = n-p-q$, ce qui est la classe de la

$(p+q)^{ième}$ polaire relative à la surface primitive. Ainsi un plan a le même point polaire par rapport à la surface et aux 1re, 2e, ..., $(n-2)^{ième}$ polaires, etc.

14. Théorème X. — *La polaire $q^{ième}$ d'un plan P_j relative à la $p^{ième}$ polaire d'un plan P_i (cette dernière étant prise par rapport à la surface primitive) coïncide avec la $p^{ième}$ polaire du plan P_i relative à la $q^{ième}$ polaire du plan P_j (cette dernière étant prise par rapport à la surface primitive).*

Cette propriété est la traduction de l'identité (9), n° 4, savoir :

$$\Delta_q^j(\Delta_p^i U) = \Delta_p^i(\Delta_q^j U).$$

15. Théorème XI. — *Si la polaire $q^{ième}$ d'un plan P_i relative à la polaire $p^{ième}$ d'un plan P_0 touche un plan P_1, la polaire $q^{ième}$ du plan P_i relative à la polaire $(n-p-q)^{ième}$ du plan P_1 touchera P_0.*

En effet, la $q^{ième}$ polaire de P_i par rapport à la $p^{ième}$ polaire de P_0 est

$$\Delta_q^i(\Delta_p^0 U) = 0,$$

ou, d'après l'identité (10), n° 4,

$$(1°) \qquad \Delta_p^0(\Delta_q^i U) = 0.$$

Comme la polaire $\Delta_q^i U$ est de la classe $(n-q)$, il résulte de l'identité (6), n° 2, que l'équation de la polaire (1°) peut s'écrire

$$(2°) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_p^0(\Delta_q^i U) &= \Delta_{n-q-p}(\Delta_q^i U)_0 \\ &= \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^{n-p-q} (\Delta_q^i U)_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais la polaire $q^{ième}$ de P_i par rapport à la polaire

$(n-p-q)^{ième}$ de P_1 a pour équation

$$(3^\circ) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_q^i\left(\Delta_{n-p-q}^1 U\right) = \Delta_{n-p-q}^1\left(\Delta_q^i U\right) \\ &\quad = \left(x_1 \frac{d.}{dx} + y_1 \frac{d.}{dy} + z_1 \frac{d.}{dz} + t_1 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p-q} \left(\Delta_q^i U\right) = 0; \end{aligned} \right.$$

les équations (3°) et (2°) mettent en évidence le fait annoncé ; car on voit que si la polaire (2°) touche le plan P_1, on aura précisément la condition pour que la polaire (3°) touche le plan P_0.

16. Théorème XII. — *Lorsqu'un plan enveloppe une surface de classe n_1, son point polaire par rapport à la surface primitive décrit, en général, une surface d'ordre $n_1(n-1)^2$.*

Déterminons le nombre des points en lesquels le lieu cherché est rencontré par une droite quelconque D. Soient V la surface de classe n_1, et S et S' les premières polaires par rapport à la surface primitive U de deux plans P et P' passant par la droite D. Les points polaires situés sur la droite D seront ceux dont les plans touchent à la fois les surfaces S et S' (8); ces plans doivent en outre, d'après la définition du lieu, toucher la surface V. Donc le nombre des points polaires situés sur la droite D est égal au nombre des plans tangents communs aux trois surfaces V, S et S', c'est-à-dire à $n_1(n-1)^2$. Donc....

En supposant $n_1 = n$, on retrouve le théorème VII, et en supposant $n_1 = 1$, on conclut de là que *le lieu des points polaires des plans passant par un point fixe est une surface d'ordre $(n-1)^2$.*

17. Théorème XIII. — *L'enveloppe des plans dont les points polaires décrivent une surface d'ordre m est une surface de classe $m(n-1)$, en général.*

Le point polaire d'un plan (x_0, y_0, z_0, t_0) a pour *équation tangentielle*

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_0 + t\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 0;$$

ses coordonnées tétraédriques (X, Y, Z, T) seront données par les relations (1[re] partie, n° 7)

$$(1^\circ) \qquad \frac{X}{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0} = \frac{Y}{\left(\frac{dU}{dy}\right)_0} = \frac{Z}{\left(\frac{dU}{dz}\right)_0} = \frac{T}{\left(\frac{dU}{dt}\right)_0}.$$

Si la surface décrite, d'ordre m, a pour *équation ponctuelle*

$$(2^\circ) \qquad F(X, Y, Z, T) = 0,$$

l'enveloppe du plan P_0 s'obtiendra en éliminant (X, Y, Z, T) entre les équations (1°) et (2°), ce qui donne

$$(3^\circ) \quad F\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{dU}{dy}\right)_0, \quad \left(\frac{dU}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{dU}{dt}\right)_0\right] = 0.$$

Or cette équation est évidemment du degré $m(n-1)$ par rapport aux coordonnées du plan tangent (x_0, y_0, z_0, t_0); donc...

18. Théorème XIV. — *Le nombre des plans qui ont même point polaire par rapport à deux surfaces de classe n et n_1 est égal à*

$$(n + n_1 - 2)[(n-1)^2 + (n_1 - 1)^2].$$

Soient U et V les deux surfaces, et (U_1, U_2, U_3, U_4), (V_1, V_2, V_3, V_4) les dérivées respectives par rapport à x, y, z, t de U et V, les plans cherchés sont déterminés par les équations

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3} = \frac{U_4}{V_4};$$

c'est-à-dire que les coordonnées de ces plans doivent vérifier les *six* équations

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} A_1 = U_1V_2 - U_2V_1 = 0, & A_4 = U_2V_3 - U_3V_2 = 0, \\ A_2 = U_1V_3 - U_3V_1 = 0, & A_5 = U_2V_4 - U_4V_2 = 0, \\ A_3 = U_1V_4 - U_4V_1 = 0, & A_6 = U_3V_4 - U_4V_3 = 0. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, les solutions communes à A_1 et A_2, lesquelles se composent : I° de celles qui annulent A_1 et A_2 sans annuler U_1 et V_1 ; II° de celles qui annulent U_1 et V_1 à la fois.

Les solutions communes à A_1, A_2 et A_6, par exemple, sont en nombre

$$N = (n + n_1 - 2)^3.$$

Or ces solutions se composent :

1° De celles qui annulent A_1, A_2 (sans annuler U_1 et V_1) et A_6 [sans annuler ni (U_4, V_4), ni (U_3, V_3)]; elles satisfont à la question, car toutes les équations (1°) sont vérifiées;

2° De celles qui annulent A_1, A_2 (sans annuler U_1 et V_1) et A_6 (en annulant U_4 et V_4; elles satisfont encore à la question;

3° De celles qui annulent A_1, A_2 (sans annuler U_1 et V_1) et A_6 (en annulant U_3 et V_3); elles ne satisfont pas à la question, car les six équations (1°) ne sont pas vérifiées ; ces dernières solutions étant données par

$$(A_1 = 0,\ U_3 = 0,\ V_3 = 0),$$

leur nombre est

$$(n + n_1 - 2)(n - 1)(n_1 - 1);$$

4° De celles qui annulent U_1 et V_1 et A_6; leur nombre est

$$(n + n_1 - 2)(n - 1)(n_1 - 1);$$

elles ne satisfont pas à la question, car il faudrait, pour que les équations (1°) fussent vérifiées, satisfaire à plus de trois relations distinctes, ce qui ne peut pas avoir lieu dans le cas général. Donc le nombre des plans cherchés est, en général,

$$(n + n_1 - 2)^3 - 2(n + n_1 - 2)(n - 1)(n_1 - 1)$$
$$= (n + n_1 - 2)[(n - 1)^2 + (n_1 - 1)^2].$$

Pour le cas de deux surfaces de deuxième classe, ce nombre est égal à 4. En supposant $n_1 = 1$, on retrouve le théorème V.

19. Soient les quatre surfaces (U, V, R, S) de classes respectives n, n_1, n_2, n_3; les points polaires d'un même plan P_0 par rapport à ces quatre surfaces seront

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x\left(\dfrac{dU}{dx}\right)_0 + y\left(\dfrac{dU}{dy}\right)_0 + z\left(\dfrac{dU}{dz}\right)_0 + t\left(\dfrac{dU}{dt}\right)_0 = 0, \\ x\left(\dfrac{dV}{dx}\right)_0 + y\left(\dfrac{dV}{dy}\right)_0 + z\left(\dfrac{dV}{dz}\right)_0 + t\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si nous exprimons que ces quatre points sont dans un même plan, c'est-à-dire que les équations ci-dessus ont une solution commune en x, y, z, t, nous trouvons, en supprimant l'indice o,

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dU}{dx} & \dfrac{dU}{dy} & \dfrac{dU}{dz} & \dfrac{dU}{dt} \\ \dfrac{dV}{dx} & \dfrac{dV}{dy} & \dfrac{dV}{dz} & \dfrac{dV}{dt} \\ \dfrac{dR}{dx} & \dfrac{dR}{dy} & \dfrac{dR}{dz} & \dfrac{dR}{dt} \\ \dfrac{dS}{dx} & \dfrac{dS}{dy} & \dfrac{dS}{dz} & \dfrac{dS}{dt} \end{vmatrix} = 0;$$

donc :

Théorème XV. — *L'enveloppe des plans tels, que leurs*

points polaires, par rapport à quatre surfaces de classes n, n_1, n_2, n_3, soient dans un même plan, est une surface de classe $(n + n_1 + n_2 + n_3 - 4)$; et son équation s'obtient en égalant à zéro le déterminant fonctionnel Δ des premiers membres des équations des surfaces considérées.

Si dans les équations (1) on remplace x, y, z, t par x_0, y_0, z_0, t_0 et inversement, nous retrouvons encore l'équation (2) en éliminant x_0, y_0, z_0, t_0, c'est-à-dire :

THÉORÈME XVI. — *La surface Δ est l'enveloppe des plans touchés à la fois par les premières polaires d'un même plan relatives aux quatre surfaces* U, V, R, S.

20. J'appellerai *faisceau de $n^{\text{ième}}$ classe* le système de toutes les surfaces de $n^{\text{ième}}$ classe assujetties à

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 2\right]$$

conditions communes, et telles, qu'*un plan*, donné arbitrairement, est touché par une seule d'entre elles; et *réseau de $n^{\text{ième}}$ classe* le système de toutes les surfaces de $n^{\text{ième}}$ classe assujetties à

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 3\right]$$

conditions communes et telles, que *deux plans*, donnés arbitrairement, sont touchés par une seule d'entre elles.

Je ne ferai qu'énoncer les propositions suivantes, car la démonstration est facile.

THÉORÈME XVII. — *Les $p^{\text{ièmes}}$ polaires d'un plan fixe par rapport aux surfaces d'un faisceau forment aussi un faisceau; elles sont inscrites dans la développable circonscrite aux $p^{\text{ièmes}}$ polaires du même plan par rapport à deux des surfaces du faisceau.*

Les plans, dont le point polaire est fixe, sont tangents communs à deux surfaces de classe $2(n-1)$.

THÉORÈME XVIII. — *Les* $p^{\text{ièmes}}$ *polaires d'un plan fixe par rapport aux surfaces d'un réseau forment un réseau; elles sont constamment tangentes aux* $(n-p)^3$ *plans tangents communs aux* $p^{\text{ièmes}}$ *polaires du même plan par rapport à trois des surfaces du réseau.*

Les plans dont le point polaire est fixe enveloppent une surface de la classe $3(n-1)$.

21. La démonstration, l'énumération même des propriétés auxquelles conduit la théorie actuelle serait fort longue et donnerait une trop grande étendue à ce Mémoire. Je ne désirais qu'ajouter une nouvelle preuve à cette proposition, déjà mise en évidence par M. Plücker, que l'analyse peut aussi traduire, expliquer et démontrer la dualité géométrique. Les définitions et les principes généraux que je viens de poser nous montrent que toute propriété des polaires d'un point ou dérivant de la théorie des polaires a nécessairement sa corrélative dans la théorie des polaires d'un plan; et qu'un seul calcul, interprété à ce double point de vue, démontre à la fois la double proposition.

Il me reste néanmoins à ajouter quelques mots sur les singularités des surfaces, afin de bien préciser l'interprétation des calculs dans le cas des équations tangentielles; ce sera l'objet d'un second paragraphe.

NOTE SUR LES CONES DU SECOND ORDRE;

Par M. MIRZA-NIZAM.

I.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A SOIT TROIS PLANS TANGENTS, SOIT TROIS GÉNÉRATRICES RECTANGULAIRES.

L'équation générale des cônes du second degré dont le sommet est (x_1, y_1, z_1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$A(x-x_1)^2+A'(y-y_1)^2+A''(z-z_1)^2+2B(y-y_1)(z-z_1)$$
$$+2B'(x-x_1)(z-z_1)+2B''(x-x_1)(y-y_1)=0.$$

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma},$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que fait cette droite avec les trois axes supposés rectangulaires. Cette droite devant se trouver sur le cône, on doit avoir

$$(1)\qquad A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta=0.$$

En exprimant que deux autres droites (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ se trouvent sur le cône, on obtient deux autres relations qui ne diffèrent de la précédente que parce que α, β, γ sont successivement remplacés par α', β', γ' et $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Ajoutant ensuite ces trois relations, en ayant égard aux six relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, & \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, & \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, & \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,\end{array}\right.$$

qui expriment que les axes sont rectangulaires, ainsi que les trois génératrices, on obtient pour cette somme

$$(\alpha) \qquad A + A' + A'' = 0.$$

Telle est la relation cherchée.

Remarque. — La relation (α) montre que si le cône a un système de trois génératrices rectangulaires, il en a une infinité; car pour un pareil système, il faudra résoudre par rapport à (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les équations (2) et les trois relations analogues à (1). Or l'une de ces relations peut être remplacée par la relation (α) qui ne contient pas les variables. On a donc huit équations à neuf inconnues; donc il y a une infinité de systèmes de trois génératrices rectangulaires.

La même remarque s'appliquerait aux trois autres cas que nous avons à traiter.

Cherchons maintenant la relation qui exprime que le cône a trois plans tangents rectangulaires. Pour cela, supposons d'abord la surface rapportée à trois axes parallèles à ses axes principaux, son équation sera

$$A(x - x_1)^2 + A'(y - y_1)^2 + A''(z - z_1)^2 = 0.$$

Son plan tangent aura une équation de la forme

$$(3) \qquad \alpha(x - x') + \beta(y - y') + \gamma(z - z') = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus des angles de l'axe de ce plan avec les trois axes de coordonnées et x', y', z' les coordonnées du point de contact. Ces dernières vérifient par conséquent l'équation de condition

$$(4) \qquad A(x' - x_1)^2 + A'(y' - y_1)^2 + A''(z' - z_1)^2 = 0.$$

Or l'équation du plan tangent au point x', y', z' est

$$A(x-x_1)(x'-x_1) + A'(y-y_1)(y'-y_1) + A''(z-z_1)(z'-z_1) = 0;$$

on doit donc avoir

$$\frac{x' - x_1}{\left(\frac{\alpha}{A}\right)} = \frac{y' - y_1}{\left(\frac{\beta}{A'}\right)} = \frac{z' - z_1}{\left(\frac{\gamma}{A''}\right)}.$$

L'équation de condition (4) devient donc

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{A'} + \frac{\gamma^2}{A''} = 0.$$

Telle est la relation qui exprime que le plan (3) est tangent au cône. Prenant maintenant deux autres plans $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ et exprimant qu'ils sont tangents au cône, on obtiendra deux autres relations analogues; ajoutant ces trois relations en ayant égard à ce que les trois plans sont rectangulaires, on obtient

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} = 0$$

ou bien

$$AA' + AA'' + A'A'' = 0.$$

On voit donc que si le cône est rapporté à trois axes parallèles à ses axes principaux, la relation cherchée exprime que la somme des produits deux à deux des coefficients de x^2, y^2, z^2 est nulle.

Or, dans le cas où les axes sont quelconques, par un changement d'axes, on ramènera l'équation à la même forme; seulement les coefficients de x^2, y^2, z^2 seront les trois racines de l'équation en S

$$(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2 \\ - (A'' - S)B''^2 + 2BB'B'' = 0,$$

et la somme des produits deux à deux des trois racines de cette équation égalée à zéro donnera la relation cherchée dans ce cas. La somme des produits deux à deux des ra-

cines de cette équation étant

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2,$$

la relation cherchée est

$$(\beta) \qquad (AA' - B''^2) + (AA'' - B'^2) + (A'A'' - B^2) = 0.$$

II.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A TROIS GÉNÉRATRICES, OU TROIS PLANS TANGENTS PARALLÈLES A TROIS DIAMÈTRES CONJUGUÉS, OU TROIS PLANS DIAMÉTRAUX CONJUGUÉS D'UN ELLIPSOÏDE.

Prenons les trois axes de l'ellipsoïde pour axes de coordonnées : l'équation de cette surface sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,;$$

l'équation du cône sera

$$A(x - x_1)^2 + A'(y - y_1)^2 + A''(z - z_1)^2 + 2B(y - y_1)(z - z_1)$$
$$+ 2B'(x - x_1)(z - z_1) + 2B''(x - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Transformons ces deux surfaces homographiquement en prenant pour formules de transformations

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c},$$

l'ellipsoïde se change dans la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

et le cône proposé dans le cône

$$A a^2 \left(x' - \frac{x_1}{a}\right)^2 + A' b^2 \left(y' - \frac{y_1}{b}\right) + A'' c^2 \left(z' - \frac{z_1}{c}\right)$$
$$+ 2Bbc\left(y' - \frac{y_1}{b}\right)\left(z' - \frac{z_1}{c}\right) + 2B'ac\left(x' - \frac{x_1}{a}\right)\left(z' - \frac{z_1}{c}\right)$$
$$+ 2B''ab\left(x' - \frac{x_1}{a}\right)\left(y' - \frac{y_1}{b}\right) = 0$$

Alors, exprimer que le premier cône a trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, c'est exprimer que le second cône a trois génératrices rectangulaires.

La condition pour que le cône ait trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est donc, d'après l'équation (α),

$$(\gamma) \qquad \mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2 = 0,$$

a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde. De même, d'après la relation (β), la formule

$$(\mathrm{AA}' - \mathrm{B}''^2)\,a^2b^2 + (\mathrm{AA}'' - \mathrm{B}'^2)\,a^2c^2 + (\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2)\,b^2c^2 = 0$$

ou bien

$$(\delta) \qquad \frac{\mathrm{AA}' - \mathrm{B}''^2}{c^2} + \frac{\mathrm{AA}'' - \mathrm{B}'^2}{b^2} + \frac{\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2}{a^2} = 0$$

exprime que le cône donné a trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde (a, b, c).

Remarque. — Les relations (γ) et (δ) supposent que les axes des coordonnées sont les axes de l'ellipsoïde.

III.

APPLICATIONS.

Applications de la relation (α).

Première application. — Résolvons le problème connu :

Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à une surface à centre donnée.

Prenons trois axes rectangulaires passant par le centre

de la surface dont l'équation est

$$f(x, y, z) = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy + F = 0.$$

Soit (x_1, y_1, z_1) un point du lieu. Le cône ayant pour sommet ce point et circonscrit à la surface contiendra les trois arêtes du trièdre trirectangle; donc les coefficients de l'équation de ce cône vérifieront la relation (α). La relation est donc l'équation du lieu, puisqu'elle a lieu entre x_1, y_1, z_1 et les quantités connues.

L'équation de ce cône est

$$(c)\ f(x_1, y_1, z_1) . f(x, y, z) - \frac{1}{4}\left(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1}\right)^2 = 0,$$

dans laquelle $f(x, y, z, t)$ est le premier membre de l'équation de la surface donnée, rendu homogène en remplaçant x, y, z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ et multipliant par t^2.

On obtient l'équation (c) en cherchant l'équation générale des surfaces doublement tangentes à la surface $f(x, y, z) = 0$ suivant le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1), et exprimant que cette surface passe par le point (x_1, y_1, z_1).

Les coefficients de l'équation (c) sont, en désignant par A, A', A'', B, B', B'' les coefficients de x^2, y^2, z^2, $2yz$, $2xz$, $2xy$,

$$A = A_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{x_1},$$

$$A' = A'_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{y_1},$$

$$A'' = A''_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{z_1},$$

$$B = B_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{y_1} f'_{z_1},$$

$$B' = B'_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{x_1} f'_{z_1},$$

$$B'' = B''_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{x_1} f'_{y_1}.$$

La relation (α) est donc, dans ce cas,

$$(A_1 + A'_1 + A''_1) f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} (f'^2_{x_1} + f'^2_{y_1} + f'^2_{z_1}) = 0.$$

Telle est l'équation du lieu. C'est une surface du second degré. Ordonnant par rapport aux variables et enlevant les accents, on a

$$\begin{aligned} x^2[(A_1 A'_1 - B''^2_1) + (A_1 A''_1 - B'^2_1)] \\ + y^2[(A_1 A'_1 - B''^2_1) + (A'_1 A''_1 - B^2_1)] \\ + z^2[(A_1 A''_1 - B'^2_1) + (A'_1 A''_1 - B^2_1)] \\ + 2(B_1 A_1 - B'_1 B''_1) yz + 2(A_1 B'_1 - B_1 B''_1) xz \\ + 2(A''_1 B''_1 - B_1 B'_1) xy + F(A_1 + A'_1 + A''_1) = 0. \end{aligned}$$

C'est une surface concentrique à la surface donnée et qui a les mêmes axes, car si on avait pris pour axes de coordonnées les axes de la surface donnée, on aurait $B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$, et l'équation du lieu se réduirait à

$$A_1(A'_1 + A''_1) x^2 + A'_1(A_1 + A''_1) y^2 + A''_1(A_1 + A'_1) z^2 + F(A_1 + A'_1 + A''_1) = 0$$

qui est l'équation d'une surface rapportée à ses axes.

Nous n'avons pas pris tout d'abord ce système de coordonnées, parce que nous aurons besoin de l'équation (c) dans ce qui va suivre.

Deuxième application. — Cherchons comme seconde application de l'équation (α) le problème suivant :

Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par une conique.

Soient

$$E = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 - 1 = 0,$$
$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

les équations de la conique, α, β et γ ayant la même signification que précédemment.

Soit (x_1, y_1, z_1) un point du lieu; le cône ayant ce point pour sommet et passant par la conique contiendra les trois génératrices du trièdre trirectangle qui a son sommet au même point : les coefficients de l'équation du cône vérifieront donc la relation (α); cette relation est donc l'équation du lieu.

Or, l'équation du cône ayant son sommet en (x_1, y_1, z_1) et passant par la conique, est

$$(c') \left\{ \begin{aligned} &(x - x_1)^2 [A_1 P_1 (P_1 - 2\alpha x_1) + E_1 \alpha^2] \\ &\quad + (y - y_1)^2 [A'_1 P_1 (P_1 - 2\beta y_1) + E_1 \beta^2] \\ &\quad + (z - z_1)^2 [A''_1 P_1 (P_1 - 2\gamma z_1) + E_1 \gamma^2] \\ &\quad - 2(y - y_1)(z - z_1)[P_1 (A''_1 \beta z_1 + A'_1 \gamma y_1) - E_1 \beta\gamma] \\ &\quad - 2(x - x_1)(z - z_1)[P_1 (A''_1 \alpha z_1 + A_1 \gamma x_1) - E_1 \alpha\gamma] \\ &\quad - 2(x - x_1)(y - y_1)[P_1 (A'_1 \alpha y_1 + A_1 \beta x_1) - E_1 \alpha\beta] = 0, \end{aligned} \right.$$

E_1 et P_1 étant ce que deviennent E et P lorsqu'on remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1.

L'équation du lieu est donc, d'après la relation (α), en ayant égard à la condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$P_1[A_1(P_1 - 2\alpha x_1) + A'_1 (P_1 - 2\beta y_1) + A''_1(P_1 - 2\gamma z_1)] + E_1 = 0$$

qui est une surface du second degré passant par la conique donnée.

Si l'on avait pris le plan de la conique pour plan des xy, ses axes pour l'axe des x et celui des y, l'équation du lieu s'obtiendrait en faisant dans l'équation précédente $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ et $A''_1 = 0$; le lieu sera, en remplaçant

P_1 par z et E_1 par $A_1 x^2 + A'_1 y^2 - 1$,

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + (A_1 + A'_1) z^2 - 1 = 0.$$

Si nous n'avons pas pris tout d'abord ce système d'axes, c'est parce que nous aurons besoin de l'équation de ce cône sous la forme (c').

Remarque. — Nous avons fait remarquer que si le cône contenait un système de trois génératrices rectangulaires, il en contenait une infinité. Donc chacun des points des lieux cherchés est le sommet d'une infinité de trièdres trirectangles répondant à la question.

Cette remarque s'appliquera également aux autres problèmes que nous allons traiter.

Applications de l'équation (β).

Première application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à une surface à centre.* (Théorème de Monge.)

Considérons le cône ayant son sommet en un point quelconque du lieu et circonscrit à la surface. Ce cône a trois plans tangents rectangulaires; ses coefficients vérifient donc la relation (β); cette relation exprime donc l'équation du lieu. Dans la première application de l'équation (α), on a obtenu les coefficients de ce cône; alors calculant les trois termes de (β), on a

$$AA' - B''^2 = [kz_1^2 + F(A_1 A'_1 - B''^2_1)] . f(x_1, y_1, z_1),$$
$$AA'' - B'^2 = [ky_1^2 + F(A_1 A''_1 - B'^2_1)] . f(x_1, y_1, z_1),$$
$$A'A'' - B^2 = [kx_1^2 + F(A'_1 A''_1 - B_1^2)] . f(x_1, y_1, z_1),$$

en posant

$$k = A_1 A'_1 A''_1 + 2 B_1 B'_1 B''_1 - A_1 B_1^2 - A'_1 B'^2_1 - A''_1 B''^2_1.$$

L'équation du lieu est donc, en enlevant les accents,

$$x^2+y^2+z^2=-\frac{F}{k}[A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2_1+A'_1A''_1-B^2_1].$$

C'est donc une sphère concentrique à la surface donnée. On voit que cette sphère a pour rayon la diagonale du parallélipipède construit sur les demi-axes de la surface, car la surface rapportée à ses axes aurait pour équation

$$Sx^2+S'y^2+S''z^2+F=0,$$

et la somme des carrés des demi-axes est

$$a^2+b^2+c^2=-F\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}+\frac{1}{S''}\right)$$

(S, S′, S″ étant les racines de l'équation en S). Or, on a, d'après cette équation en S,

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}+\frac{1}{S''}=\frac{A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2+A'_1A''_1-B^2_1}{k};$$

donc

$$a^2+b^2+c^2=-\frac{F}{k}(A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2_1+A'_1A''_1-B^2_1),$$

ce qui prouve ce qu'on a avancé.

Deuxième application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces roulent sur une conique.*

On voit de même que pour avoir l'équation du lieu, il faudra appliquer la relation (β) aux coefficients de l'équation (c'). Des coefficients de cette équation on tire, en représentant par A, A′, A″, B, B′, B″ ces coefficients,

$$AA'-B''^2=P^2_1[(A'_1A''_1\alpha^2+A_1A''_1\beta^2+A_1A'_1\gamma^2)z^2_1$$
$$-(A_1\beta^2+A'_1\alpha^2)],$$

$$AA'' - B'^2 = P_1^2[(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) y_1^2 - (A_1 \gamma^2 + A''_1 \alpha^2)],$$

$$A'A'' - B^2 = P_1^2[(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) x_1^2 - (A'_1 \gamma^2 + A''_1 \beta^2)].$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha^2(A'_1 + A''_1) + \beta^2(A_1 + A''_1) + \gamma^2(A_1 + A'_1),$$

une sphère concentrique à la conique, dont le rayon est la diagonale du rectangle construit sur les deux demi-axes de cette conique; car on sait que les axes de la section de la surface

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 - 1 = 0$$

par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

sont donnés par l'équation en r^2

$$r^4(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) - r^2[\alpha^2(A'_1 + A''_1) + \beta^2(A_1 + A''_1) + \gamma^2(A_1 + A'_1)] + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$r'^2 + r''^2 = \frac{\alpha^2(A'_1 + A''_1) + \beta^2(A_1 + A''_1) + \gamma^2(A_1 + A'_1)}{A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2},$$

ce qui démontre ce qu'on a avancé.

Application de la relation (γ).

PREMIÈRE APPLICATION. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les arêtes sont tangentes à une surface à centre et parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

Prenons les trois axes de l'ellipsoïde pour axes de

coordonnées. L'équation de la première surface sera

$$f(x, y, z) = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy + F = 0,$$

et l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Le cône ayant pour sommet un point du lieu et circonscrit à la première surface, contenant trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, les coefficients de son équation doivent vérifier la relation (γ). Or, on a trouvé déjà les coefficients de ce cône (c) dans la première application de la relation (α); donc, remplaçant dans la relation (δ) ces coefficients par leurs valeurs, on a pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned} x^2&[(A_1 A'_1 - B''_1)\, b^2 + (A_1 A''_1 - B'^2_1)\, c^2] \\ &+ y^2[(A_1 A'_1 - B''^2_1)\, a^2 + (A'_1 A''_1 - B^2_1)\, c^2] \\ &+ z^2[(A_1 A''_1 - B'^2_1)\, a^2 + (A'_1 A''_1 - B^2_1)\, b^2] \\ &+ 2\,(B_1 A_1 - B'_1 B''_1)\, a^2 yz + 2\,(A'_1 B'_1 - B_1 B''_1)\, b^2 xz \\ &+ 2\,(A''_1 B''_1 - B_1 B'_1)\, c^2 xy + F\,(A_1 a^2 + A'_1 b^2 + A''_1 c^2) = 0 \end{aligned}$$

qui est une surface du second degré concentrique à la surface donnée.

Deuxième application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les arêtes passent par une conique à centre donnée et sont parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

On peut transporter l'ellipsoïde parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que son centre coïncide avec celui de la conique. Prenant alors pour axes de coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La conique peut être considérée comme l'intersection d'un plan passant par le centre et d'une surface à centre du second degré, ayant les mêmes axes que l'ellipsoïde. Par conséquent, pour avoir l'équation du lieu, il faudra écrire la relation (δ) entre les coefficients du cône (c') qui a son sommet au point (x_1, y_1, z_1) du lieu et passant par la conique. L'équation du lieu est donc

$$P_1[A_1(P_1-2\alpha x_1)a^2+A'_1(P_1-2\beta x_1)b^2+A''_1(P_1-2\gamma x_1)] + E_1(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)=0,$$

qui représente une surface du second degré passant par la conique donnée et par l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan représenté par le second facteur du premier terme égalé à zéro.

Applications de la relation (δ).

Première application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface à centre donnée et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde.* (Généralisation du théorème de Monge et concours général de 1860.)

En prenant pour axes de coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde, on voit que pour avoir l'équation du lieu il faudra exprimer la relation (δ) entre les coefficients du cône (c). L'équation du lieu est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{F}{k}\left(\frac{A_1A'_1-B''^2}{c^2}+\frac{A_1A''_1-B'^2}{b^2}+\frac{A'_1A''_1-B^2}{a^2}\right)=0,$$

qui représente un ellipsoïde concentrique à la surface donnée et homothétique à l'ellipsoïde donné.

Deuxième application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde et qui roulent sur une conique à centre donnée.*

En prenant encore les axes de l'ellipsoïde donné pour axes de coordonnées, l'équation du lieu n'est autre chose que la relation (δ) entre les coefficients du cône (c'). L'équation du lieu est donc

$$(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$= \frac{A'_1 \gamma^2 + A''_1 \beta^2}{a^2} + \frac{A_1 \gamma^2 + A''_1 \alpha^2}{b^2} + \frac{A_1 \beta^2 + A'_1 \alpha^2}{c^2},$$

qui est un ellipsoïde concentrique à la conique donnée et homothétique à l'ellipsoïde donné.

Il résulte de là que toutes les questions sur les trièdres se résolvent par une marche analogue de calcul.

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE,

Avec applications aux sections coniques et aux courbes d'ordre supérieur, particulièrement à une famille de courbes du sixième ordre et de la quatrième classe;

Par M. G.-G. DE LONGCHAMPS,
Élève de l'École Normale supérieure.

La méthode de Géométrie comparée que j'expose ici repose sur le théorème suivant, conséquence évidente du théorème relatif à une transversale dans un triangle et de la réciproque.

1° Une transversale étant donnée dans le plan d'un triangle, on prend les symétriques, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, des points où ces côtés sont rencontrés par la transversale; les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.

Ces deux droites, tellement liées l'une à l'autre que la

seconde se déduise de la première et inversement, peuvent être appelées *transversales réciproques*. Si l'on considère les segments de ces transversales compris entre deux mêmes côtés du triangle et qu'on appelle les *segments correspondants*, on énoncera ce théorème :

2° La droite qui joint les points milieux de deux segments correspondants passe par le milieu de la médiane correspondant au sommet de l'angle considéré.

3° La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les points milieux du quadrilatère complet que forme la transversale proposée avec le triangle. Ces points milieux et les points où la transversale réciproque rencontre les côtés du triangle forment deux systèmes de points homothétiques ; le centre de gravité du triangle est centre d'homothétie.

4° Étant données trois transversales se coupant deux à deux sur les côtés d'un triangle donné, les transversales réciproques forment également un triangle dont les sommets reposent sur les côtés du triangle donné, et ces deux triangles, savoir : celui des transversales et celui des transversales réciproques, jouissent de la propriété que la droite qui joint leurs centres de gravité passe par le centre de gravité du triangle donné et y est partagée en deux parties égales.

Tous ces théorèmes sont assez élémentaires pour que nous puissions nous dispenser de les démontrer ici. Avant d'aller plus loin dans cette théorie, je cite dès à présent l'application qu'on peut faire des théorèmes précédents à la recherche de la loi qui unit les centres de gravité des divers triangles qui composent un polygone complet, c'est-à-dire un polygone dont les côtés sont indéfiniment prolongés.

On déduit, en effet, du dernier théorème énoncé ce corollaire :

Si l'on considère les deux systèmes de trois points

formés par les côtés du triangle donné sur la transversale et sa réciproque, la droite qui joint les centres de gravité de ces deux systèmes de points passe constamment par le centre de gravité du triangle donné et y est partagée en deux parties égales.

On déduit de là le théorème suivant :

Si l'on considère un quadrilatère complet, ce quadrilatère définit quatre triangles que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites données. Que l'on considère l'un de ces triangles en particulier et que l'on joigne son centre de gravité au centre de gravité du système des trois points qui se trouvent sur la quatrième droite, les quatre droites que l'on peut ainsi obtenir concourent en un même point et y sont partagées en deux parties égales.

Ce point situé sur la droite qui joint les points milieux des diagonales, et qui se trouve être le centre de gravité de ces trois points, peut être appelé, en n'attachant à ce mot qu'un sens purement géométrique, le centre de gravité du quadrilatère complet. En se laissant guider par quelques idées générales semblables à celles qui m'ont servi (*) dans une recherche analogue sur les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par un polygone complet, on arrive au théorème général que j'énonce :

Si l'on considère un polygone complet de n droites définissant n polygones de $(n-1)$ droites, que l'on joigne le centre de gravité d'un de ces polygones (point défini par cette même loi que nous énonçons en ce moment) au centre de gravité des $(n-1)$ points qui se trouvent sur la $n^{ième}$ droite dont on vient de faire abstraction, les n droites ainsi obtenues concourent au même point et y sont partagées dans le rapport de $n-2$ à 2.

(*) *Revue des Sociétés savantes*, mai 1864.

Mais, sans insister davantage sur ce point, j'expose les principes qui font de ces théorèmes la base d'une nouvelle méthode de déformation des figures. On sait que tout théorème de Géométrie élémentaire, dans lequel à un point ou à une droite correspond un point ou une droite, peut servir de point de départ à une méthode de Géométrie comparée, et ces idées ont été exposées dernièrement dans les *Annales* par M. Mathieu. C'est ici le premier théorème qui servira de point de départ, en faisant correspondre une droite à une droite, ainsi que nous l'avons expliqué en commençant. Si on fait tourner une droite autour d'un point et que l'on cherche l'enveloppe des transversales réciproques, l'équation homographique du point se change en l'équation homographique d'une conique, de telle sorte qu'on peut dire qu'à un point correspond une conique.

Mais le point ne renfermant que deux paramètres arbitraires, la conique, on le comprend bien, doit être assujettie à remplir trois conditions. On reconnaît, en effet, qu'elle est tangente aux trois côtés du triangle qui sert à la déformation, et que suivant un langage usité nous appellerons désormais triangle de référence. Les théorèmes énoncés plus haut, et le théorème de Newton, font voir que le point et la conique corrélative sont liés par une loi simple :

Un point a pour corrélatif une conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, et inversement une telle conique a pour corrélative un point : ce point, le centre de gravité du triangle et le centre de la conique sont trois points en ligne droite, et le rapport des distances de ces trois points est celui de 2 à 1.

La simplicité de cette loi fait tout le succès de ce mode de déformation des figures. On peut dire que les conséquences nombreuses, et souvent simples, que l'on en peut

déduire sont renfermées dans ce théorème ou dans son corollaire que j'énonce :

Si deux points dans la figure proposée sont situés sur une même tangente à une certaine conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, les centres des coniques corrélatives de ces points sont situés sur une même tangente à une certaine conique tangente aux droites qui joignent les points milieux du triangle de référence.

Je donne quelques exemples. Comme il ne sera considéré dans ce qui va suivre que des coniques toujours tangentes à trois droites, ces trois conditions seront sous-entendues, et nous dirons par exemple : soit $C(Oa_1, Oa_2)$ une conique tangente aux droites Oa_1, Oa_2, ou encore $C(Oa_1, Oa_1)$ une conique tangente à Oa_1 au point O.

1° Étant donnés un point fixe O, trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, et deux droites Oa_1, Oa_2 partant du point O, on considère les trois coniques $C(Oa_1, Oa_1)$, $C(Oa_2, Oa_2)$, $C(Oa_1, Oa_2)$. La droite qui joint le centre de cette dernière au point milieu de la distance des centres des deux premières passe par un point fixe quand les droites Oa_1, Oa_2 varient de toutes les manières possibles. Ce point partage la distance du point fixe au centre de gravité du triangle dans le rapport de 2 à 1.

2° Étant données trois droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3 et trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, on considère les deux coniques $C(Oa_1, Oa_2)$ et $C(Oa_3, Oa_3)$ et la droite qui joint leurs centres. Les trois droites qu'on peut ainsi obtenir concourent au même point.

3° Étant données quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 et trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, on

considère les six coniques $\Sigma C(Oa_1, Oa_2)$ dont les centres, situés trois à trois en ligne droite, forment un quadrilatère complet. La droite qui joint les points milieux des diagonales de ce quadrilatère passe par un point fixe quand les droites concourantes tournent autour du point O d'une façon quelconque.

Les propriétés métriques d'une figure donnée se retrouvent sans altération dans la figure corrélative; ainsi, le théorème sur la cinquième tangente mobile à une conique qui en rencontre quatre autres fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant donne pour corrélatif ce théorème :

4° Étant données trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler et quatre droites Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 concourantes, on considère une cinquième droite Oa mobile autour du point O et les quatre coniques $\Sigma C(Oa, Oa_1)$; ces quatre coniques, on le sait, ont leurs centres en ligne droite, comme tangentes à quatre mêmes droites : le rapport anharmonique de ces quatre points est constant quand varie la droite Oa.

On en déduit ce corollaire :

Étant données quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4, on considère les six coniques $\Sigma C(Oa_1, Oa_2)$. Il y a sur chacune de ces droites trois points de contact; si l'on considère deux des systèmes de ces points, les droites qui les joignent deux à deux concourent au même point.

Je borne là ces exemples, suffisants, je crois, pour faire apercevoir l'esprit de la méthode, et avant de dire quelques mots de l'application de cette méthode aux courbes du sixième ordre, je cite quelques théorèmes bien faciles à démontrer et dont chacun peut donner lieu à une méthode de Géométrie comparée.

1° Étant donné un triangle, on en joint les sommets aux milieux des segments correspondants formés par les côtés de ce triangle sur une transversale, et l'on prolonge ces droites d'une quantité égale : les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.

2° Étant donné un triangle, on joint les points milieux de ses côtés aux points milieux des segments déterminés par le triangle sur une transversale ; si l'on prend les points milieux de ces droites, les trois points ainsi déterminés sont en ligne droite.

3° Si d'un point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle, et qu'on prenne les symétriques des pieds de ces perpendiculaires par rapport aux points milieux des côtés du triangle, et qu'en ces nouveaux points on élève des perpendiculaires aux côtés du triangle, ces trois droites concourent au même point.

Ce théorème se démontre plus généralement pour trois directions choisies de façon que les parallèles à ces directions menées par les points milieux des côtés du triangle concourent au même point.

4° Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point quelconque de son plan, et qu'on prenne, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, les symétriques des points où ces droites rencontrent ces côtés ; que l'on joigne enfin les points ainsi obtenus aux sommets du triangle, les trois droites concourent au même point.

On peut constater que les droites des deux premiers théorèmes enveloppent des courbes semblables à celles qui sont fournies par la méthode de déformation que j'expose en ce moment ; le troisième théorème ne fournit rien, car la droite qui joint les deux points inverses passe constamment par le centre du cercle circonscrit et y est partagée en deux parties égales, de telle sorte que les figures sont simplement déplacées et non déformées, comme il

importe qu'elles le soient. Le dernier de ces théorèmes, qui fait correspondre un point à un point et réciproquement, réalise géométriquement la transformation analytique que M. Magnus a développée en 1831 dans le *Journal de Crelle*. On peut vérifier pour le cas présent et par la Géométrie les résultats qu'a démontrés généralement M. Magnus, savoir : que dans une telle transformation, à une droite correspond une conique passant par trois points fixes, et à une courbe de l'ordre n correspond généralement une courbe de l'ordre $2n$. On trouve en effet qu'à une droite correspond une conique circonscrite au triangle de référence; à une conique prise d'une façon quelconque, une courbe du quatrième ordre ayant généralement pour points multiples d'ordre 2 (réels ou imaginaires) les sommets du triangle de référence. Cette méthode, pour le dire en passant, peut ajouter une solution de plus aux nombreuses solutions de la construction par points d'une conique donnée par cinq points; mais, à part quelques applications de ce genre et un petit nombre de théorèmes qu'elle peut fournir, elle ne semble pas féconde, parce qu'on ne voit pas facilement une loi géométrique bien simple qui unisse deux points inverses à la figure de référence.

Je reviens à la méthode que je développe plus spécialement et que j'ai annoncée comme conduisant à l'étude d'une famille de courbes d'ordre supérieur. Le théorème général s'énonce :

Une courbe du degré m et de la classe n a pour corrélative une courbe de la classe $2n$ et du degré $2m+n$ ayant trois tangentes multiples d'ordre n qui sont les côtés du triangle de référence.

Ce théorème se démontre simplement de la manière suivante :

Soit A la courbe proposée, A′ la courbe corrélative;

soit m' un point. Nous nous proposons de trouver combien on peut mener de tangentes à la courbe A' par le point m'. Ce point m' a pour corrélative une conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, c'est-à-dire une courbe de la classe 2 ayant $2n$ tangentes communes avec la courbe A; il y a donc $2n$ droites passant par le point m' et tangentes à A', c'est-à-dire que la classe de A' est égale à $2n$.

Cherchons l'ordre de cette courbe A', c'est-à-dire combien de points de cette courbe sont situés sur une droite L'; or L' a pour corrélative une droite L, et il y aura sur L' autant de points (réels ou imaginaires) que l'on pourra mener de coniques tangentes aux trois côtés du triangle de référence, à la droite L et à la courbe A. M. Chasles a énoncé ce théorème général dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de l'année dernière, que dans un système dont les caractéristiques sont μ et ν il existe $m\mu + n\mu$ coniques tangentes à une courbe de la classe n et de l'ordre m. Ici en particulier les caractéristiques du système de quatre droites étant 2 et 1, il y a $2m + n$ de ces coniques dont nous cherchions le nombre, et ceci démontre le théorème.

On vérifie sans peine, en considérant les n tangentes qui partent d'un sommet du triangle de référence à la courbe A, qu'il y a n points de contact de la courbe A' sur le côté opposé.

Ceci suppose, bien entendu, que la courbe A n'a aucune relation avec la figure de référence, et on peut reconnaître que le degré de la courbe A' s'abaisse d'une, de deux ou de trois unités quand la courbe A passe par un, deux ou trois sommets du triangle de référence. En appliquant ces considérations à la section conique, on obtient donc généralement une courbe du sixième ordre et de la quatrième classe, qui peut s'abaisser quant à son

ordre, au cinquième, au quatrième et au troisième ordre. En particulier, dans le cas de la courbe du troisième ordre, on reconnaît que les côtés du triangle de référence sont les tangentes en ses points d'inflexion, et que ces trois points sont en ligne droite, ce qui est une propriété connue de ces courbes.

Je donne en finissant quelques propriétés de ces courbes du sixième ordre :

1° Les six points de contact de la courbe avec ses tangentes doubles sont six points d'une même conique.

2° Les tangentes doubles rencontrent la courbe chacune en deux autres points (réels ou imaginaires) ; ces six points sont six points d'une même conique.

3° Le lieu des centres des coniques tangentes à la courbe et à ses trois tangentes doubles est une conique.

Cette conique joue un grand rôle dans les propriétés de ces courbes dont elle semble être un élément important.

4° Les points où cette conique coupe les côtés du triangle qui joignent les points milieux des côtés du triangle formé par les tangentes doubles et les points où la courbe coupe ses tangentes doubles sont deux à deux en ligne droite avec les sommets du triangle des tangentes doubles.

On peut encore démontrer que ces courbes ont généralement quatre points multiples d'ordre 2 et six asymptotes. Les points multiples en particulier jouissent de propriétés simples et intéressantes. Tout théorème sur les sections coniques donne pour corrélatif un théorème sur ces courbes. Les nombreuses propriétés qu'on peut ainsi déduire des propriétés connues des coniques peuvent être considérées comme des corollaires de cette proposition :

Si dans la figure proposée deux points sont situés sur

une même tangente à une section conique, les centres des coniques corrélatives sont situés sur une même tangente à la conique donnée par le théorème III.

Ainsi, en transformant le théorème qui dit que la droite qui joint un point au milieu de la corde de contact passe par un point fixe, centre de la conique considérée, on a :

1° Si l'on considère deux tangentes Oa, $O'a'$ à cette courbe aux points O et O' et les coniques $C(Oa, Oa)$, $C(O'a', O'a')$, $C(Oa, O'a')$ assujetties en outre à être tangentes aux tangentes doubles de la courbe, la droite qui joint le centre de la dernière au point milieu de la droite qui joint les centres des deux premières passe par un point fixe quand Oa et $O'a'$ varient de toutes les manières possibles.

2° Si l'on considère trois tangentes Oa, $O'a'$, $O''a''$ à cette courbe et les coniques $C(Oa, Oa)$, $C(O'a', O''a'')$ assujetties en outre à être tangentes aux trois tangentes doubles, et que l'on joigne le centre de la dernière au centre de la première, les trois droites que l'on peut ainsi obtenir par des combinaisons analogues concourent au même point.

Je ne multiplie pas ces exemples, qu'on peut indéfiniment poursuivre en leur conservant une simplicité comparable à celle du théorème des coniques que l'on emploie pour la transformation. On peut se demander si cette famille de courbes du sixième ordre ne se rencontre pas dans la recherche des lieux géométriques. M. Chasles a démontré que dans un système (μ, ν) le lieu des centres des coniques est une courbe de l'ordre ν; en particulier, le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et à une conique est une courbe du sixième ordre. Ces courbes sont précisément celles que nous venons d'étudier.

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION TRANSCENDANTE

$$a^x + b^x = c^x$$

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 454);

PAR M. QAHER BEY.

On a

$$a^x + b^x = c^x,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x = \sin^2\varphi, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^x = \cos^2\varphi,$$

$$x \log\frac{a}{c} = 2\log\sin\varphi, \quad x\log\frac{b}{c} = 2\log\cos\varphi,$$

$$\frac{\log\frac{a}{c}}{\log\frac{b}{c}} = \frac{\log\sin\varphi}{\log\cos\varphi}.$$

Soit

$$m = \frac{\log\frac{a}{c}}{\log\frac{b}{c}},$$

une quantité facile à calculer :

$$\frac{\log\sin\varphi}{\log\cos\varphi} = m,$$

$$\log\sin\varphi = m\log\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi = \cos^m\varphi,$$

$$\sin^2\varphi = \cos^{2m}\varphi.$$

Il en résulte

$$\cos^{2m}\varphi + \cos^2\varphi - 1 = 0.$$

C'est une équation à trois termes que l'on résout comme on veut, avec la formule de Lagrange, par exemple.

Alors

$$x = \frac{2 \log \cos \varphi}{\log \frac{b}{c}}.$$

Note du rédacteur. — Ce calcul suppose a et b moindres que c. Si l'on avait $a < c$, $b < c$, il suffirait de poser $x = -y$, et l'on aurait à résoudre l'équation

$$\left(\frac{1}{a}\right)^y + \left(\frac{1}{b}\right)^y = \left(\frac{1}{c}\right)^y$$

qui rentre dans le cas examiné par M. Qâher-Bey.

CONSTRUCTION D'UN CERCLE OSCULATEUR D'UNE CONIQUE;

Par M. LECOCQ,
Maître répétiteur au lycée Saint-Louis.

Soient OBAC une conique quelconque; OX, OY la tangente et la normale au point O de cette conique. D'un point arbitraire I pris sur OY, décrivons avec IO comme rayon une circonférence qui coupe la conique en deux points A et B; démontrer que :

1° La corde commune AB a une direction constante;

2° Les bissectrices DR, DS des angles qu'elle forme avec la tangente sont parallèles aux axes de la courbe;

3° Si l'on mène OC parallèle à AB et qu'on élève MH perpendiculaire au milieu de la corde OC, le point H sera le centre et OH le rayon de courbure pour le point O.

Soit

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + y = 0$$

l'équation de la conique donnée par rapport à la tangente OX et à la normale OY, et

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2uy = 0$$

l'équation du cercle OBA ; on en déduit

$$(3) \qquad (A - C)y^2 + Bxy + (1 - 2Cu)y = 0,$$

équation qui représente les deux droites OX et AB. L'équation de cette dernière droite est donc

$$(4) \qquad (A - C)y + Bx + (1 - 2Cu) = 0.$$

On voit que son coefficient angulaire $\frac{-B}{A - C}$ est indépendant du rayon u du cercle, et que sa valeur est celle de tang 2α, α étant l'angle de l'un des axes de la courbe avec OX, ce qui démontre les deux premières parties de l'énoncé.

Il résulte de là que tout cercle qui passera par le point O et par les points de rencontre de la conique avec une parallèle à AB sera tangente en O à OX. Mais si l'on prend pour cette parallèle la droite OC, le cercle, n'ayant plus qu'un point de rencontre C avec la conique, en a trois autres communs avec elle au point O ; donc il sera le cercle osculateur (*).

(*) Le théorème de M. Lecocq revient à celui que M. Chasles donne sous le n° 11 dans son Mémoire sur les lignes conjointes, en indiquant qu'il peut servir à construire le cercle osculateur (*Journal de M. Liouville*, t. III, p. 385).

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 490

(voir tome XVIII, page 443);

PAR M. VENCESLAS NIEBYLOWSKI,
Elève de spéciales au lycée Bonaparte.

Étant donné un cône du second degré, trouver le lieu d'où ce cône est vu sous un angle donné.

Je prends le sommet du cône pour origine, et pour axes de coordonnées les axes mêmes du cône. Son équation est alors

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} x = mz, \\ y = nz \end{array}\right.$$

une droite passant par le sommet du cône.

Exprimons que les deux plans tangents au cône et passant par cette droite font l'angle donné, et d'abord que le plan

$$x - mz + K(y - nz) = 0 \text{ (K indéterminée)}$$

ou

$$x + Ky - (m + Kn)z = 0$$

est tangent au cône.

On a pour équation de condition

$$A(A'n^2 + A'')K^2 + 2AA'mnK + A'(Am^2 + A'') = 0.$$

Soient K' et K'' les racines de cette équation, on a alors

pour équations des plans tangents

$$x + K'y - (m + K'n)z = 0,$$
$$x + K''y - (m + K''n)z = 0,$$

d'où

$$\cos V = \frac{1 + K'K'' + (m + K'n)(m + K''n)}{\sqrt{[1 + K'^2 + (m + K'n)^2][1 + K''^2 + (m + K''n)^2]}},$$

$$\cos^2 V [1 + K'^2 + (m + K'n)^2][1 + K''^2 + (m + K''n)^2]$$
$$= [1 - K'K'' + (m + K'n)(m + K''n)]^2,$$

$$\cos^2 V [(m^2 + 1) + 2mnK' + (n^2 + 1)K'^2]$$
$$\times [(m^2 + 1) + 2mnK'' + (n^2 + 1)K''^2]$$
$$= [(m^2 + 1) + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2;$$

or le produit des deux facteurs entre crochets est égal à

$$[(m^2 + 1) + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2$$
$$+ (m^2 + n^2 + 1)(K' - K'')^2;$$

donc

$$\cos^2 V (m^2 + n^2 + 1)(K' - K'')^2$$
$$= [m^2 + 1 + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2 \sin^2 V;$$

mais

$$K' + K'' = -\frac{2mnAA'}{A(A'n^2 + A'')}, \quad K'K'' = \frac{A'(Am^2 + A'')}{A(A'n^2 + A'')},$$

$$(K' - K'')^2 = \frac{-4AA'A''(Am^2 + A'n^2 + A'')}{A^2(A'n^2 + A'')^2}.$$

Substituant dans l'équation de la courbe, il vient

$$\frac{-4AA'A''(m^2 + n^2 + 1)(Am^2 + A'n^2 + A'')}{A^2(A'n^2 + A'')^2}$$
$$= \tan^2 V \left[m^2 + 1 - \frac{2m^2n^2AA'}{A(A'n^2 + A'')} + \frac{A'(Am^2 + A'')(n^2 + 1)}{A(A'n^2 + A'')}\right]^2.$$

Simplifions : on obtient

$$4AA'A''(m^2+n^2+1)(Am^2+A'n^2+A'') + \tang^2 V[A(A'+A'')m^2+A'(A+A'')n^2+A''(A+A')]^2=0;$$

or

$$m=\frac{x}{z},\quad n=\frac{y}{z};$$

donc l'équation du lieu est

$$4AA'A''(x^2+y^2+z^2)(Ax^2+A'y^2+A''z^2) + \tang^2 V[A(A'+A'')x^2+A'(A+A'')y^2+A''(A+A')z^2]^2=0.$$

Le lieu est donc un cône du quatrième degré dont le sommet est à l'origine.

Si $V = 90$ degrés, le lieu est un cône du second degré,

$$A(A'+A'')x^2+A'(A+A'')y^2+A''(A+A')z^2=0.$$

Ce cône a même sommet que le cône donné et ses axes ont la même direction que les axes du cône donné.

Question 504

(voir tome XIX, page 44);

PAR MM. DESQ ET GRASSAT.

Par un point fixe M *pris sur une conique, on mène une tangente; soit* T *un point quelconque pris sur cette droite,* TN *une seconde tangente,* N *le point de contact; au point* T *on élève une perpendiculaire sur la tangente* TN; *elle sera rencontrée en* R *par la perpendiculaire abaissée de* N *sur la tangente fixe* TM. *Quel est le lieu du point* R?

Je prends pour axe des Y la tangente MT; pour axe des X la normale au point M; l'équation de la conique

sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0.$$

La tangente au point N (α, β) aura pour équation

$$(2A\beta + B\alpha)y + (B\beta + 2C\alpha + E)x + E\alpha = 0.$$

Donc l'ordonnée du point T est

$$-\frac{E\alpha}{2A\beta + B\alpha};$$

par suite, l'équation de TR est

$$Y + \frac{E\alpha}{2A\beta + B\alpha} = \frac{2A\beta + B\alpha}{B\beta + 2C\alpha + E}x;$$

celle de NR est

$$y = \beta.$$

On a de plus

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + E\alpha = 0,$$

et on obtiendra l'équation du lieu en éliminant α et β entre ces trois équations, c'est-à-dire α entre

$$C\alpha^2 + (By + E)\alpha + Ay^2 = 0$$

et

$$[2Ay^2 + \alpha(By + E)](2C\alpha + By + E) = x(2Ay + B\alpha)^2$$

ou

$$\alpha^2[B^2x - 2C(By + E)] + \alpha[4ABxy - 4ACy^2 - B(y+E)^2] \\ + 2Ay^2(2Ax - By - E) = 0.$$

Or, lorsqu'on a deux équations du deuxième degré,

$$M\alpha^2 + N\alpha + P = 0,$$
$$M'\alpha^2 + N'\alpha + P' = 0,$$

le résultat de l'élimination de α entre ces deux équations est

$$(MP' - PM')^2 = (MN' - NM')(NP' - PN').$$

Dans le cas actuel,

$$\begin{aligned}MP' - PM' &= Ay^2[2C(2Ax - By - E) - B^2x + 2C(By + E)]\\ &= -Axy^2(B^2 - 4AC),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}NP' - PN' &= Ay^2\{2(By + E)[2Ax - (By + E)] - 4ABxy\\ &\qquad + (By + E)^2 + 4ACy^2\}\\ &= -Ay^2[y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MN' - NM' &= C[4ABxy - (By + E)^2 - 4ACy^2]\\ &\quad - (By + E)[B^2x - 2C(By + E)]\\ &= (Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E).\end{aligned}$$

Donc l'équation du lieu demandé est

$$\begin{aligned}&A^2x^2y^4(B^2 - 4AC)^2\\ &\quad = -Ay^2[y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)]\\ &\qquad \times[(Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E)];\end{aligned}$$

il se décompose en $y^2 = 0$, c'est-à-dire la normale au point M, et

$$\begin{aligned}&Ax^2y^2(B^2 - 4AC)^2 + [y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)]\\ &\quad \times[(Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E)] = 0.\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette équation, du quatrième degré en général, se décompose dans le cas de la parabole en

$$2By + E - 4Ax = 0,$$
$$C(2By + E) - B^2x = 0.$$

Cette dernière, en tenant compte de $B^2 = 4AC$, est identique à la première; donc, dans ce cas, le lieu se réduit à la droite double

$$2By - 4Ax + E = 0,$$

ce qui représente, comme on le sait, la directrice de la parabole, résultat très-remarquable (*).

Question 618

(voir 2e série, t. I, p. 169);

PAR M. JACQUES BELLACHI.

La courbe parallèle à la podaire d'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

a pour équation

$$(\alpha\beta - \gamma)^2 = 4(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha\gamma),$$

en posant

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - k^2) - a^2b^2}{3a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)},$$

$$\beta = \frac{(x^2 + y^2 - k^2)^2 + (\alpha^2 + b^2)k^2 - a^2x^2 - b^2y^2}{2a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)^2},$$

$$\gamma = \frac{a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)^2}{k^2}.$$

(STREBOR.)

Je considère la courbe parallèle, à l'exemple de M. Salmon, comme le lieu des centres (X, Y) des cercles tangents à la courbe donnée et d'un rayon k; je substitue à la podaire de l'ellipse une conique variable avec chaque point de cette courbe, et qui touche cette courbe au même point. Son équation, comme il est facile de s'en assurer, est

$$(2Xx + 2Yy - A)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$$

(*) Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, la courbe a deux asymptotes parallèles à l'axe des x, c'est-à-dire à la normale. Dans le cas de l'hyperbole, il y a en outre deux asymptotes perpendiculaires à celles de l'hyperbole. P.

en posant

$$X^2 + Y^2 - k^2 = A.$$

La condition pour que le cercle

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 - k^2 = 0$$

soit tangent à la conique s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la fonction quadratique

$$(2Xx + 2Yy - A)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 \\ + \lambda[(x - X)^2 + (y - Y)^2 - k^2)] = 0,$$

ce qui donne

$$(2A + \lambda)^2[\lambda(Y^2 + X^2) - a^2Y^2 - b^2X^2] \\ - (\lambda A + A^2)[\lambda^2 + \lambda(4X^2 + 4Y^2 - a^2 - b^2) \\ - 4b^2X^2 - 4a^2y^2 + a^2b^2] = 0,$$

ou, en développant et réduisant,

$$k^2\lambda^3 + [A(a^2 + b^2) - A^2 - a^2Y^2 - b^2X^2]\lambda^2 \\ + [A^2(a^2 + b^2) - Aa^2b^2]\lambda - a^2b^2A^2 = 0,$$

ou, en remarquant que $A = X^2 + Y^2 - k^2$, et par conséquent

$$A(a^2 + b^2) - a^2Y^2 - b^2X^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 + (a^2 + b^2)k^2,$$

l'équation devient, après réduction,

$$\frac{k^2}{a^2b^2A^2}\lambda^3 + 3\frac{a^2X^2 + b^2Y^2 - (a^2 + b^2)k^2 - A^2}{3a^2b^2A^2}\lambda^2 \\ + 3\frac{A(a^2 + b^2) - a^2b^2}{3Aa^2b^2} - 1 = 0,$$

ou

$$\gamma\lambda^3 - 3\beta\lambda^2 + 3\alpha\lambda - 1 = 0.$$

L'égalité de deux racines de cette équation est la condition de tangence qui est donnée en égalant à zéro le discriminant de la fonction homogène du troisième de-

gré. On aura

$$(\alpha\beta - \gamma)^2 = 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\alpha^2 - \beta),$$

comme le trouve M. Strebor. En changeant b^2 en $-b^2$ on aurait la courbe parallèle à la podaire de l'hyperbole. Un procédé analogue donnera l'équation de la surface parallèle à la surface podaire d'un ellipsoïde.

Question 747

(voir 2e série, t. IV, p. 428);

Par M. DURANTON.

Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde, lorsque cette extrémité décrit une circonférence?

(Catalan.)

Cette question rentre dans ce problème plus général que nous allons résoudre :

Trouver l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du rayon vecteur issu d'un point fixe et aboutissant à une circonférence donnée?

Nous ferons usage de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au point fixe et le plan de la circonférence parallèle à celui des xy; nous déterminerons d'ailleurs la circonférence par l'intersection de son plan avec la surface d'une sphère passant par le point fixe; ses équations seront ainsi

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) = 0.$$

(2) $$z - h = 0,$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de la sphère.

On aura de même pour équations du rayon vecteur,

λ et μ étant des variables,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \lambda z, \\ y = \mu z. \end{cases}$$

Ce rayon rencontre la circonférence au point dont les coordonnées sont

$$x = \lambda h, \quad y = \mu h, \quad z = h.$$

Comme ce point doit être sur la sphère, on a l'équation de condition

$$(4)\qquad (\lambda^2 + \mu^2 + 1)h - 2(a\lambda + b\mu + c) = 0.$$

On trouve d'autre part pour équation du plan mené par ce même point à l'extrémité du rayon vecteur

$$(5)\qquad \lambda x + \mu y + z - h(\lambda^2 + \mu^2 + 1) = 0.$$

Au moyen de la relation (4) on peut, dans cette expression, considérer λ comme fonction de μ; si l'on égale à zéro la dérivée prise à ce point de vue, on obtient

$$(x - 2h\lambda)\frac{b - h\mu}{h\lambda - a} + y - 2h\mu = 0$$

ou bien

$$(6)\qquad h(y - 2b)\lambda - h(x - 2a)\mu = ay - bx.$$

Pour avoir l'enveloppe cherchée, il ne reste plus qu'à éliminer λ et μ entre (4), (5), et (6). Afin de faciliter, nous remplacerons l'une des équations (4) ou (5) par celle qu'on obtient en éliminant entre elles $\lambda^2 + \mu^2$; on aura ainsi

$$(7)\qquad (x - 2a)\lambda + (y - 2b)\mu = 2c - z.$$

Posons, pour abréger,

$$x - 2a = x_1, \quad y - 2b = y_1, \quad z - 2c = z_1, \quad ay - bx = u.$$

Les équations (6) et (7) ainsi modifiées donnent

$$\lambda = \frac{uy_1 - hx_1 z_1}{2h(x_1^2 + y_1^2)}, \quad \mu = \frac{-(hy_1 z_1 + ux_1)}{2h(x_1^2 + y_1^2)},$$

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{u^2 + h^2 z_1^2}{4h^2(x_1^2 + y_1^2)}.$$

En substituant ces valeurs dans (4), on a, après transformations et réductions faciles,

$$(8)\quad \begin{cases} 4h(h - 2c)(x_1^2 + y_1^2) + h^2 z_1^2 + u^2 \\ \quad - 4h(ay_1 - bx_1)u + 4h(ax_1 z_1 + by_1 z_1) = 0, \end{cases}$$

où il ne reste plus qu'à remplacer x_1, y_1, z_1 et u par leurs valeurs. Or on peut se dispenser de faire cette substitution; il suffit pour cela de transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont

$$(9)\qquad x = 2a, \quad y = 2b, \quad z = 2c;$$

les indices disparaissent alors dans (8) et u reste égal à $ay - bx$. L'équation de l'enveloppe cherchée devient ainsi

$$(10)\quad \begin{cases} 4h(h - 2c)(x^2 + y^2) + h^2 z^2 \\ \quad - 3(ay - bx)^2 + 4h(axz + byz) = 0. \end{cases}$$

Cette équation, homogène par rapport à x, y, z, est celle d'un cône du second degré.

Discussion. — 1° Les coordonnées (9) du sommet, par rapport à l'ancienne origine, étant $2a$, $2b$, $2c$, et celles du centre de la sphère, a, b, c, il en résulte que *le sommet du cône enveloppe est diamétralement opposé au point fixe, sur la sphère qui passe par ce point et par la circonférence donnée.*

2° Si l'on a $a = 0$ et $b = 0$, le point fixe est sur la perpendiculaire au plan de la circonférence qui passe par

le centre ; l'équation (10), qui devient

$$4(h-2c)(x^2+y^2)+hz^2=0,$$

montre que le cône enveloppe est de révolution. Donc il est oblique, pour toute autre position du point fixe.

3° Si le point fixe est dans le plan de la circonférence, $h=0$, le sommet s'éloigne à l'infini, de même que le centre de la sphère, et l'enveloppe devient un cylindre droit dont la section est égale à la circonférence donnée. C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en traitant directement la question à ce point de vue.

Remarque. — Pour résoudre la question selon l'énoncé de M. Catalan, on rapportera l'ellipsoïde à trois axes rectangulaires, dont deux soient situés dans une section circulaire diamétrale ; les équations de départ seront alors

$$x^2+y^2+mz^2+2nxz-b^2=0,$$
$$z-h=0,$$

et l'on continuera comme ci-dessus.

Il est évident que, dans cette question, les deux hyperboloïdes et le paraboloïde elliptique peuvent être substitués à l'ellipsoïde.

Note. — MM. Niebylowski, O. Puel, Mercè Busco ont traité la même question.

CORRESPONDANCE.

M. Amigues, *élève de l'École Normale.* — « Parmi les méthodes de discussion de l'équation en λ relative à l'intersection de deux coniques, il en est une dont le succès paraît aller croissant et que je me fais un devoir de vous signaler, parce qu'elle me semble vicieuse.

» Voici en quoi elle consiste. Après avoir établi qu'on a toujours deux sécantes réelles communes aux deux coniques, on suppose que ces deux droites sont prises pour axes, et, dans ce système de coordonnées, on forme l'équation $f(\lambda) = 0$, pour laquelle on établit dès lors très-simplement que toutes les racines sont réelles si les quatre points communs aux deux coniques sont tous réels ou tous imaginaires, et qu'une seule de ces racines est réelle si deux de ces points sont réels et les deux autres imaginaires.

» Ceci est incontestable. Mais ce qu'on se propose dans cette discussion, c'est d'établir que cette propriété appartient non-seulement à l'équation particulière $f(\lambda) = 0$, à laquelle donne lieu le système d'axes choisi, mais à toutes les équations $F(\lambda) = 0$ qui répondent à un système d'axes quelconque.

» Or les coefficients de $F(\lambda)$ sont des fonctions des coefficients des deux coniques, et ces derniers eux-mêmes dépendent du choix des axes. Il faudrait donc, pour compléter la démonstration, établir qu'un changement d'axes, tout en modifiant les coefficients et les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$, ne peut faire changer le nombre des racines réelles de cette équation.

» A la vérité, si λ représentait un élément géométrique, pas ne serait besoin de prendre cette peine; car la réalité de cet élément ne dépendrait que des données de la figure, et l'on pourrait alors, pour simplifier, prendre des axes particuliers. Mais ici ce n'est pas le cas, et c'est ce que me paraissent n'avoir pas observé ceux qui accordent leur confiance à cette méthode. »

Note du Rédacteur. — L'observation de M. Amigues est fort juste, et d'ailleurs il peut arriver que l'une des deux sécantes réelles ou toutes les deux soient à l'infini;

et alors, comment prendre ces deux droites pour axes?

Voici comment on peut lever la difficulté. Soient

$$P = 0, \quad Q = 0$$

les équations des deux coniques, et

$$P + \lambda Q = RS = 0$$

l'équation de l'ensemble de deux droites réelles ou imaginaires passant par les quatre points communs aux deux courbes. Si l'on change d'axes, ces équations deviendront

$$P' = 0, \quad Q' = 0, \quad P' + \lambda' Q' = R' S' = 0.$$

Or, si RS est réel, il en sera de même de $R'S'$; et si RS est imaginaire, $R'S'$ sera imaginaire. D'un autre côté, λ, λ' seront réels ou imaginaires, selon que RS ou $R'S'$ seront réels ou imaginaires. Donc λ et λ' seront en même temps réels ou imaginaires. Par conséquent, relativement à la réalité des racines de l'équation en λ, peu importera le système d'axes auxquels on rapportera la courbe. On pourra donc prendre pour axes les deux sécantes communes réelles dont on a démontré l'existence quand les quatre points d'intersection sont à des distances finies. Le cas des points à l'infini se déduira du cas général par des considérations de limites.

On pourrait encore former les trois équations analogues à $RS = 0$, au moyen des coordonnées des quatre points d'intersection, et, sans recourir à une transformation, examiner successivement les résultats obtenus dans le cas de quatre points réels, de deux réels, de quatre imaginaires ; on verrait que les trois valeurs de RS sont réelles dans les deux premiers cas, et qu'il y en a deux imaginaires dans le dernier. P.

SUR LA PODAIRE D'UNE CONIQUE PAR RAPPORT A UN FOYER;

Par M. H. PICQUET,
Élève de l'École Polytechnique.

On sait que la podaire d'une courbe du second degré par rapport à l'un de ses foyers est le cercle décrit sur son grand axe comme diamètre; nous nous proposons de faire voir ici comment cette propriété donne lieu en quelque sorte à un nouveau mode de transformation géométrique, et comment elle permet souvent de simplifier un énoncé ou une démonstration.

Cherchons, dans quelques cas, les conditions auxquelles ce cercle, que nous désignerons par C, est assujetti, lorsque la conique, qui d'ailleurs a un foyer fixe, doit satisfaire à une condition donnée.

I. Supposons que la conique doive varier en demeurant tangente à une droite fixe; le cercle C variera en passant par un point fixe, pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite. Comme conséquence, si plusieurs droites varient en restant tangentes à une conique fixe, cela revient à dire que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur ces droites restent sur un même cercle.

II. Ce cas est le plus simple. Supposons plus généralement que la conique doive rester tangente à une courbe fixe Q, alors le cercle C sera tangent à la podaire P de cette courbe par rapport au foyer de la conique. En effet, si nous considérons la courbe dans une position voisine où elle ait avec la conique deux tangentes com-

munes très-rapprochées, nous voyons que le cercle C et la podaire P auront deux points communs qui seront les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces tangentes. Si la courbe devient tangente à la conique, ces tangentes viendront à coïncider et le cercle C aura avec la podaire P deux points communs réunis en un seul, c'est-à-dire qu'il lui sera tangent. Ainsi, si la conique doit être tangente à une parabole confocale avec elle, le cercle C sera tangent à la tangente au sommet de cette parabole; si au lieu d'une parabole on a une conique quelconque, confocale avec la première, le cercle C sera tangent au cercle ayant pour diamètre le grand axe de cette conique si c'est une ellipse, son axe transverse si c'est une hyperbole. Réciproquement, si le cercle C est tangent à une droite ou à un cercle, la conique correspondante sera tangente à une parabole confocale ayant la droite donnée pour tangente au sommet, ou à une conique confocale, concentrique avec le cercle et ayant pour grand axe le rayon de ce cercle. Dans tout ce que nous venons de dire, il est évident que si le point de contact de la conique avec la courbe Q est donné, le point de contact du cercle C avec la podaire P sera déterminé; ce sera le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente à la courbe Q au point donné.

III. La conique doit passer par un point fixe A. Il en résulte, d'après la construction connue de la tangente à la podaire d'une courbe, que le cercle C sera tangent au cercle décrit sur AF comme diamètre, F étant le foyer de la conique. On voit ici qu'à un cercle tangent à deux autres correspond une conique passant par deux points; ceci n'implique pas contradiction avec ce qui a été dit précédemment; tout à l'heure le point F était quelconque, maintenant il doit être pris à l'un des points

d'intersection des deux cercles donnés. De même, si le cercle est tangent à une droite, et si le point F est pris sur cette droite, la conique correspondante aura une direction asymptotique perpendiculaire à cette droite. Ceci se voit facilement en considérant ce cas comme une limite du précédent; on sait d'ailleurs que si du foyer d'une hyperbole on mène des tangentes au cercle ayant pour diamètre l'axe transverse, elles sont perpendiculaires aux asymptotes.

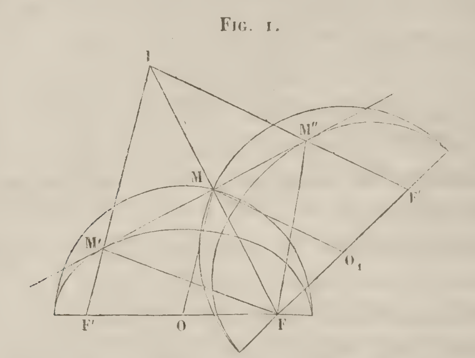
Comme application de cette propriété, on pourrait démontrer que tout cercle tangent à deux autres coupe orthogonalement un de leurs cercles bissecteurs, c'est-à-dire un des deux cercles qui passent par leurs points d'intersection et sont tangents aux bissectrices de l'angle sous lequel ils se coupent. Mais ceci est plus évident si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de transformation l'un des points communs à deux cercles et à leurs cercles bissecteurs. On pourrait ensuite tirer de là la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, mais elle serait aussi compliquée que les constructions connues.

IV. Si la conique doit avoir pour demi grand axe une longueur donnée, le cercle C aura cette longueur pour rayon.

V. Si le cercle C doit couper un autre cercle C′ sous un angle donné, alors la conique correspondante au cercle C rencontrera la conique correspondante au cercle C′ de telle façon que les points de contact d'une tangente commune soient vus d'un foyer commun sous l'angle donné ou sous un angle supplémentaire. En effet, construisons les deux coniques confocales, une tangente commune M′M″ et les cercles correspondants; soient F le

foyer commun, F' et F'' les autres foyers, O et O_1 les centres; soit M un point d'intersection des cercles, pied

FIG. 1.



de la perpendiculaire abaissée du point F sur la tangente commune $M'M''$; joignons $M'F'$ et $M''F''$; ces droites se rencontrent en I sur MF, car si l'on prend $IM = MF$ et si l'on joint IF' et IF'', ces droites passent respectivement par les points de contact d'après la théorie des foyers; donc

$$IM = MF;$$

par suite,

$$\widehat{M'FM} = \widehat{M'IM} \quad \text{et} \quad \widehat{M''FM} = \widehat{M''IM};$$

ajoutant,

$$\widehat{M'FM''} = \widehat{M'IM''};$$

joignons MO, MO_1, ces droites sont parallèles à IF', IF'', donc

$$\widehat{M'IM''} = \widehat{OMO_1} = \widehat{M'FM''}.$$

Or OMO_1 est supplémentaire de l'angle sous lequel les cercles se coupent; donc..., etc. C. Q. F. D.

La démonstration serait la même si les deux coniques n'étaient pas des ellipses.

On peut énoncer ce résultat en disant :

L'angle sous lequel on voit, du foyer commun de deux coniques confocales, les points de contact d'une tangente commune est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles décrits sur leurs grands axes respectifs comme diamètres.

Ce qui démontre en même temps la réciproque de ce que nous avions avancé. On voit qu'en particulier, si l'angle donné est nul, les coniques seront tangentes, ce que nous savons déjà.

Comme application, supposons qu'une série de coniques confocales soient disposées de telle sorte que les points de contact d'une tangente commune à chacune d'elles et à une autre conique fixe confocale avec elles soient vus du foyer commun sous un angle droit, alors les cercles correspondants à toutes ces coniques couperont orthogonalement le cercle correspondant à la conique fixe, c'est-à-dire qu'ils auront tous même centre radical, le centre de la conique fixe.

VI. Si la conique doit avoir pour centre un point donné, le cercle C aura pour centre le même point. Cette propriété permet de trouver un grand nombre de lieux de centres de coniques confocales, assujetties à deux autres conditions, le foyer commun étant donné. Nous savons, par exemple, que le lieu des centres des cercles tangents à deux droites se compose des deux bissectrices de leur angle ; le lieu des centres des coniques correspondantes sera le même ; les cercles étant tangents à deux droites, les coniques correspondantes seront tangentes à deux paraboles dont les droites données seront les tangentes aux sommets ; donc :

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun et tangentes à deux paraboles confocales avec

elles se compose des deux bissectrices des tangentes aux sommets de ces paraboles.

On peut ainsi trouver un grand nombre d'énoncés : nous en citerons quelques-uns.

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun, tangentes à une conique confocale et ayant un grand axe donné, se compose de deux cercles concentriques à la conique et ayant pour rayon le grand axe de cette conique augmenté ou diminué du grand axe donné.

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun F *et qui passent par deux points* A *et* B *se compose de deux coniques homofocales ayant pour foyers les milieux de* FA *et de* FB, *savoir : une ellipse ayant pour grand axe* $\frac{1}{2}(\text{FA}+\text{FB})$, *et une hyperbole ayant pour axe transverse* $\frac{1}{2}(\text{FA}-\text{FB})$.

Nous aurions ainsi presque tous les lieux de centres de coniques confocales assujetties à deux autres conditions.

VII. Les principes précédents peuvent s'appliquer à la transformation par la méthode des polaires réciproques. Supposons en effet que l'on ait à transformer un énoncé dans lequel entrent plusieurs cercles ; la transformation ordinaire par rapport à un cercle donnera des coniques confocales jouissant de certaines propriétés qui seront les transformées de celles des cercles donnés. Au lieu d'introduire ces coniques dans le nouvel énoncé, il sera en général plus élégant d'introduire les cercles décrits sur leurs grands axes comme diamètres, lesquels satisferont à certaines conditions résultant de celles qui sont imposées aux coniques correspondantes et qu'on pourra souvent déduire de ce qui précède. Prenons un exemple : on sait (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234) que le

cercle circonscrit à un triangle conjugué à une conique a pour puissance par rapport au centre de la conique la somme des carrés de ses demi-axes, c'est-à-dire que tous les cercles analogues ont pour centre radical commun le centre de la conique. Transformons cet énoncé par rapport à un pôle de transformation quelconque : nous aurons une conique, ses triangles conjugués et la série des coniques inscrites dans ces triangles et ayant le pôle de transformation pour foyer; ces coniques seront telles, que les points de contact de leurs tangentes communes avec une conique fixe confocale (polaire du cercle coupé orthogonalement par tous les autres) seront vus du foyer commun sous un angle droit, donc leurs cercles correspondants auront même centre radical (V). En outre, les cercles correspondants sont parfaitement définis : ce sont les cercles passant par les trois pieds des perpendiculaires abaissées du foyer commun sur les côtés de chaque triangle conjugué. On a donc cet énoncé :

On donne sur un plan une conique et un point fixe; on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle conjugué à la conique, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une circonférence. Pour chaque triangle conjugué à la conique on décrit ainsi une circonférence; toutes ces circonférences ont le même centre radical. (MANNHEIM.)

Ainsi se trouve résolue la question 744 (t. IV, p. 430).

Pour donner un autre exemple, nous savons que le lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit est un cercle; ensuite nous avons démontré (*voir* le journal *l'Institut* du 20 décembre 1865) qu'il existe deux points dans le plan de tout quadrilatère, d'où l'on voit sous un angle droit chacune des coniques qui lui sont inscrites; en d'autres termes, les cercles analogues pour toutes ces coniques ont même axe radical. Transformant

ces énoncés d'après ce qui précède, nous aurons les suivants :

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les droites qui interceptent dans une conique des cordes vues de ce point sous un angle droit est un cercle. Si la conique varie en passant par quatre points fixes, tous les cercles ainsi obtenus ont même axe radical.

L'idée fondamentale est donc de remplacer dans un énoncé une conique, polaire réciproque d'un cercle, par son cercle correspondant. Ainsi le cercle A, lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit, se transforme en un autre défini par l'énoncé précédent, et comme c'est lui qui coupe orthogonalement tout cercle circonscrit à un triangle conjugué à la conique, il en résulte que dans la question 744 le centre radical dont nous avons démontré l'existence est le centre du cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur toutes les droites interceptant dans la conique donnée des cordes vues de ce point sous un angle droit. Il est assez curieux de voir par cette méthode des cercles qui ont même centre radical se transformer en des cercles jouissant de la même propriété : c'est ce qui explique l'utilité du § V. Si l'axe radical était commun, la même chose aurait lieu, la propriété se conserverait. D'ailleurs cette nouvelle espèce de transformation est réciproque; car, si après avoir transformé un cercle en un autre, on veut transformer à son tour ce dernier, on retombe sur le premier.

VIII. Il est aisé de voir que les considérations précédentes peuvent s'étendre au cas de l'espace. Il suffit de remplacer les coniques confocales par des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun, et

les cercles par des sphères. Ainsi obtient-on les énoncés suivants :

Le lieu des centres des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun et tangentes à deux paraboloïdes de révolution confocaux avec elles se compose des plans bissecteurs des plans tangents aux sommets de ces paraboloïdes.

Le lieu des centres des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun, tangentes à une autre confocale avec elles, et ayant un grand axe donné, se compose de deux sphères concentriques à la surface donnée et ayant pour rayon le grand axe de cette surface augmenté ou diminué du grand axe donné.

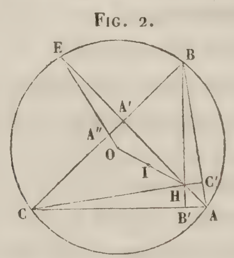
Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans qui coupent une surface du second degré suivant des courbes bases de cônes équilatères ($A + A' + A'' = 0$) *ayant pour sommet ce point, est une sphère. Si la surface varie en passant par huit points fixes, toutes les sphères ainsi obtenues ont même plan radical; si la surface varie en passant par sept points fixes, elles ont même axe radical.*

On donne une surface du second degré et un point, on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les quatre faces d'un tétraèdre conjugué à la surface, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une sphère. Toutes les sphères analogues ont même centre radical, qui est le centre du cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur les plans qui coupent la surface donnée suivant une courbe base d'un cône équilatère ayant pour sommet le point donné.

IX. Les mêmes considérations permettent de résoudre les questions 737 et 738. Soient en effet un cercle et un point H fixe : nous allons démontrer que tous les triangles

qui sont inscrits dans le cercle et qui ont ce point pour point de rencontre des hauteurs enveloppent une même ellipse ayant un foyer en H et l'autre foyer au centre du cercle, si le point H est à l'intérieur du cercle. Il suffit de faire voir que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point H sur les trois côtés du triangle est un

Fig. 2.



cercle; en effet, soit ABC un de ces triangles : ces trois pieds A', B', C' seront les pieds des hauteurs, et le cercle qu'ils définissent sera évidemment le même pour tous les triangles, car le point A' est le milieu de HE et le lieu de ces milieux est un cercle dont le centre est au milieu I de HO. L'enveloppe des côtés du triangle est donc une ellipse ayant un foyer en H, son centre en I et l'autre foyer en O : par conséquent, le cercle O est le cercle directeur de cette ellipse, puisque chacun de ses points s'obtient en abaissant du foyer H des perpendiculaires sur les tangentes à l'ellipse et les prolongeant d'une quantité égale à elles-mêmes. Nous avons donc le centre, les foyers et le grand axe de l'ellipse. Nous voyons en outre que si un triangle est à la fois circonscrit à cette ellipse et inscrit dans son cercle directeur, il aura nécessairement le point H pour point de rencontre des hauteurs; soit en effet A'' un des points de contact, joignons OA'' et abaissons EA' perpendiculaire sur CB; cette droite passera par l'autre foyer qui sera symétrique de E par rapport à CB; comme il en est de même pour les autres côtés du triangle, ce

foyer se confond avec son point de rencontre des hauteurs. Ces deux questions ont une autre signification géométrique. Nous savons en effet :

1° *Que lorsqu'on peut placer sur un cône du second degré un trièdre trirectangle, on peut en placer une infinité.*

En transformant cet énoncé par la théorie des polaires réciproques, on arrive au suivant :

2° *Lorsqu'on peut circonscrire à un cône du second degré un trièdre trirectangle, on peut lui en circonscrire une infinité.*

On a souvent attribué indistinctement à ces deux espèces de cônes la dénomination de *cônes équilatères*, parce que pour les premiers la somme des coefficients des carrés des variables est nulle, et pour les seconds la somme des carrés des axes. Il nous semble qu'on peut les distinguer en appelant les uns cônes équilatères de première espèce, les autres cônes équilatères de seconde espèce (*voir* l'*Institut* du 20 décembre 1865). Cela posé, considérons un cône appartenant à la première espèce, dont S soit le sommet, et coupons-le suivant un cercle ; si l'on prend sur ce cercle trois points A, B, C correspondant aux arêtes d'un trièdre trirectangle, le triangle ABC variera en restant inscrit dans le cercle, et il est facile de voir qu'il conservera toujours le même point de rencontre des hauteurs H, projection du point S sur le plan du cercle; donc ses côtés envelopperont une ellipse ayant pour foyer le point H, et le cône ayant cette ellipse pour base et le point S pour sommet appartiendra à la seconde espèce (dont l'existence serait démontrée par là même si nous ne la connaissions pas déjà), et aura la ligne SH pour ligne focale, puisqu'une section perpendiculaire à SH a un foyer en son point d'intersection avec cette ligne. Donc ces deux cônes, qui ont même sommet, sont tels, que les

plans cycliques du premier sont perpendiculaires aux lignes focales de l'autre, et cette propriété est réciproque parce qu'alors les cônes sont supplémentaires, ce qui est d'ailleurs évident sur la figure, car l'arête SA″ de l'un est évidemment perpendiculaire à l'arête SA de l'autre.

Donc :

Lorsqu'un trièdre trirectangle se meut de façon que ses arêtes engendrent un cône du second degré, ses faces enveloppent un autre cône supplémentaire du premier.

Ces deux cônes sont équilatères l'un d'une espèce, l'autre de l'autre. Puisque les plans cycliques de l'un sont perpendiculaires aux lignes focales de l'autre, en transportant l'un d'eux parallèlement d'une façon convenable, on pourra toujours s'arranger de manière qu'une section convenable de l'un d'eux soit la courbe polaire réciproque de l'autre par rapport à une sphère qui aurait son centre au sommet du premier (*voir* les *Recherches de Géométrie pure* de M. Chasles, Mémoire publié à Bruxelles, en 1829). C'est ce qui explique encore pourquoi la théorie des polaires réciproques permet de tirer les propriétés de l'un de ces cônes des propriétés de l'autre.

PROPRIÉTÉS FOCALES

des coniques passant par quatre points et des surfaces de révolution du second degré passant par cinq points;

Par M. RECOQ (*).

I. — *Des coniques passant par quatre points.*

1. Théorème I. — *Lorsqu'une conique passe par quatre points donnés* A_1, A_2, A_3, A_4, *il y a une relation linéaire et homogène entre les distances* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ *d'un foyer à ces quatre points. Cette relation est, en appelant* S_1, S_2, S_3, S_4 *les surfaces des quatre triangles* $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, *etc.*,

$$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

En exprimant que l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx+ny+p)^2$$

est vérifiée par les quatre points donnés (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), on a

$$mx_1 + ny_1 + p = \pm\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2} = \pm\delta_1,$$
$$mx_2 + ny_2 + p = \pm\sqrt{(x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2} = \pm\delta_2,$$
$$mx_3 + ny_3 + p = \pm\sqrt{(x_3-\alpha)^2 + (y_3-\beta)^2} = \pm\delta_3,$$
$$mx_4 + ny_4 + p = \pm\sqrt{(x_4-\alpha)^2 + (y_4-\beta)^2} = \pm\delta_4;$$

(*) Ce travail est le dernier d'un jeune homme qui donnait de belles espérances. M. Recoq, lauréat du concours général des colléges des départements, reçu à l'École Polytechnique et à l'École Normale, ayant opté pour cette dernière, est mort le 21 février 1866 à Montpellier.

d'où, éliminant m, n, p,

$$\begin{vmatrix} \pm\delta_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ \pm\delta_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ \pm\delta_3 & 1 & x_3 & y_3 \\ \pm\delta_4 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\delta_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \mp \delta_2 \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\pm \delta_3 \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mp \delta_4 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quatre déterminants qui sont en évidence représentent au signe près $2S_1$, $2S_2$, $2S_3$, $2S_4$, et l'on a

(1) $$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

Remarque. — Cette relation représente le lieu des foyers des coniques passant par quatre points, en prenant pour coordonnées les distances d'un point quelconque du lieu à ces points. Ce lieu a pour équation en coordonnées rectilignes

$$S_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \pm S_2\sqrt{(x-x_2)+(y-y_2)^2}$$
$$\pm S_3\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2} \pm S_4\sqrt{(x-x_4)+(y-y_4)^2} = 0.$$

Il est du sixième degré (*), car une droite à l'infini renferme six foyers, puisqu'il passe deux paraboles par quatre points et que chacune d'elles a trois foyers à l'infini. (*Voir* Cremona, 2e série, t. III, p. 23.)

(*) Cependant, quand on chasse les radicaux, on a une équation du quatrième degré. P.

Les axes des deux paraboles qui passent par les quatre points sont deux directions asymptotiques. Les quatre points donnés sont quatre foyers (*) de la courbe. La transformation par rayons vecteurs réciproques n'altère pas la forme de l'équation (1).

2. *Cas particuliers.* — 1° Si les quatre points sont les sommets d'un parallélogramme, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4,$$

et il vient, dans le cas de l'ellipse,

$$(2) \qquad \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0;$$

dans le cas de l'hyperbole,

$$(3) \qquad \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

en supposant que A_1, A_3 sont deux sommets opposés. On le voyait *à priori*.

2° En supposant que l'un des points soit le point de concours des hauteurs du triangle formé par les trois autres, la conique devient une hyperbole équilatère; dans ce cas l'énoncé précédent se modifie ainsi :

Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un foyer aux trois sommets et au point de concours des hauteurs.

Cette relation est, en appelant T la surface du triangle et D la distance du foyer considéré au point d'intersection des hauteurs, S_1, S_2, S_3 les surfaces des triangles ayant pour sommet ce même point et pour bases les côtés du triangle,

$$(4) \qquad S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 = TD.$$

(*) J'appelle *foyer* dans une courbe le centre d'un cercle bitangent de rayon nul.

Elle représente le lieu des foyers des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$D = \frac{\delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3}{3}.$$

Donc : *Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle équilatéral, la distance d'un foyer au centre est une moyenne algébrique entre ses distances aux trois sommets.*

3° On peut se demander ce que devient la relation générale quand l'un des points, A_4 par exemple, s'éloigne à l'infini suivant une direction donnée. Cette relation devient, en appelant a_1, a_2, a_3 les côtés du triangle fixe, lesquels servent de base à trois triangles ayant pour sommet commun A_4, et dont nous appellerons les hauteurs h_1, h_2, h_3,

$$a_1 h_1 \delta_1 \pm a_2 h_2 \delta_2 \pm a_3 h_3 \delta_3 \pm S_4 \delta_4 = 0,$$

ou

$$\pm \frac{h_1}{\delta_4} a_1 \delta_1 \pm \frac{h_2}{\delta_4} a_2 \delta_2 \pm \frac{h_3}{\delta_4} a_3 \delta_3 = S_4.$$

Or il est facile de voir que les rapports $\frac{h_1}{\delta_4}$, $\frac{h_2}{\delta_4}$, $\frac{h_3}{\delta_4}$ tendent vers $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$, α_1, α_2, α_3 étant les angles des côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ avec la direction fixe, et par suite, en appelant A_1, A_2, A_3 les projections des côtés de ce triangle sur une perpendiculaire à la direction fixe, et posant $S_4 = S$, on a

$$\pm A_1 \delta_1 \pm A_2 \delta_2 \pm A_3 \delta_3 = S.$$

4° Si deux des points A_3, A_4 vont à l'infini suivant deux directions déterminées, on a

$$\delta_1 \pm \delta_2 = \text{const.},$$

la constante étant affectée de deux valeurs qui sont l'une réelle, l'autre imaginaire, quand les points A_1, A_2 sont réels. Ainsi : le lieu des foyers des coniques semblables semblablement placées à une conique donnée et passant par deux points fixes (réels) se compose de deux coniques (l'une réelle, l'autre imaginaire) ayant pour foyers ces deux points.

3. J'appelle distance d'un point à un cercle la longueur de la tangente issue de ce point, et je considère non plus un cercle bitangent de rayon nul, mais un cercle bitangent de rayon r. En partant de l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=(mx+ny+p)^2,$$

on arrive, comme précédemment, à la relation

$$S_1\,\delta_1 \pm S_2\,\delta_2 \pm S_3\,\delta_3 \pm S_4\,\delta_4 = 0,$$

où δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sont les distances des points donnés au cercle bitangent; mais si l'on imagine quatre cercles de rayon r, ayant pour centres les quatre points, on voit que les distances du centre du cercle bitangent à ces quatre cercles ne sont autres que les distances δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Donc :

THÉORÈME II. — *Étant donnés une conique passant par quatre points et un cercle bitangent de rayon r, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances du centre de ce cercle à quatre cercles fixes de rayon r ayant pour centre les quatre points donnés. Cette relation est*

$$S_1\,\delta_1 \pm S_2\,\delta_2 \pm S_3\,\delta_3 \pm S_4\,\delta_4 = 0.$$

Elle représente le lieu du centre du cercle bitangent de rayon r quand la conique varie. Ce lieu est tangent à chacun des quatre cercles fixes au moins en deux points.

4. La relation (1), qui existe entre les rayons vecteurs d'un point quelconque du lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère, est aussi la relation entre les cosinus des angles de la tangente en ce point avec les mêmes rayons vecteurs. Ainsi l'on a

$$S_1 \cos\theta_1 \pm S_2 \cos\theta_2 \pm S_3 \cos\theta_3 \pm S_4 \cos\theta_4 = 0,$$

et, plus généralement, si une courbe a pour équation

$$m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \ldots + m_n \delta_n = K,$$

on a

$$m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 + \ldots + m_n \cos\theta_n = 0.$$

En effet, si l'on rapporte la courbe à deux axes rectangulaires, et si l'on appelle α l'angle de la tangente avec l'axe des x, on a, puisque

$$\delta_p = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2},$$

$$\tang\alpha = -\frac{m_1 \frac{x - x_1}{\delta_1} + m_2 \frac{x - x_2}{\delta_2} + \ldots + m_n \frac{x - x_n}{\delta_n}}{m_1 \frac{y - y_1}{\delta_1} + m_2 \frac{y - y_2}{\delta_2} + \ldots + m_n \frac{y - y_n}{\delta_n}},$$

ou, en désignant par $\mu_1, \mu_2, \ldots$ les angles que font avec l'axe des x les distances $\delta_1, \delta_2, \ldots$,

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{m_1 \cos\mu_1 + m_2 \cos\mu_2 + \ldots + m_n \cos\mu_n}{m_1 \sin\mu_1 + m_2 \sin\mu_2 + \ldots + m_n \sin\mu_n}$$

ou

$$m_1 \cos(\alpha - \mu_1) + m_2 \cos(\alpha - \mu_2) + \ldots + m_n \cos(\alpha - \mu_n) = 0,$$

c'est-à-dire

$$m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 + \ldots + m_n \cos\theta_n = 0.$$

Cette formule fournit une construction de la tangente en un point quelconque de la courbe. Je me bornerai au

cas des équations

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

qui représentent le lieu des foyers des ellipses et des hyperboles circonscrites à un parallélogramme. (La composition du concours de l'École Normale en 1864 consistait en partie à trouver ce lieu.) On a dans ce cas

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \cos\theta_3 - \cos\theta_4 = 0,$$
$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \cos\theta_3 - \cos\theta_4 = 0,$$

d'où l'on déduit la construction suivante :

Pour construire la tangente en un point quelconque M de la courbe lieu des foyers des coniques circonscrites à un parallélogramme, décrivez avec un rayon arbitraire un cercle ayant M pour centre, cherchez le centre des moyennes distances du quadrilatère qui a pour sommets les points d'intersection du cercle avec les rayons vecteurs du point M directs pour deux sommets opposés, ou adjacents inverses pour les deux autres, et la droite qui joindra le point M à ce point sera la normale.

Cette construction n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une construction beaucoup plus générale donnée par le marquis de L'Hôpital, lorsque la courbe considérée a une équation quelconque

$$f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n) = 0.$$

La simplification qui se présente ici provient de ce que les coefficients de l'équation différentielle ont des valeurs constantes qui sont précisément $m_1, m_2, \ldots, m_n$. (*Voir* Paul Serret, *Méth. en Géom.*, p. 64.)

II. — *Des surfaces de révolution du second degré passant par cinq points.*

1. Théorème I. — *Lorsqu'une surface de révolution passe par cinq points donnés* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *il y a une*

relation linéaire et homogène entre les distances d'un foyer à ces cinq points. Cette relation est, en appelant V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 *les volumes des cinq tétraèdres* $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5, \ldots$,

$$V_1\delta_1 \pm V_2\delta_2 \pm V_3\delta_3 \pm V_4\delta_4 \pm V_5\delta_5 = 0.$$

On a, en considérant l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (mx + ny + pz + q)^2,$$

$$mx_1 + ny_1 + pz_1 + q = \pm\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2} = \pm\delta_1,$$

$$mx_2 + ny_2 + pz_2 + q = \pm\sqrt{(x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2 + (z_2-\gamma)^2} = \pm\delta_2,$$

$$mx_3 + ny_3 + pz_3 + q = \pm\sqrt{(x_3-\alpha)^2 + (y_3-\beta)^2 + (z_3-\gamma)^2} = \pm\delta_3,$$

$$mx_4 + ny_4 + pz_4 + q = \pm\sqrt{(x_4-\alpha)^2 + (y_4-\beta)^2 + (z_4-\gamma)^2} = \pm\delta_4,$$

$$mx_5 + ny_5 + pz_5 + q = \pm\sqrt{(x_5-\alpha)^2 + (y_5-\beta)^2 + (z_5-\gamma)^2} = \pm\delta_5;$$

d'où, éliminant m, n, p, q,

$$\begin{vmatrix} \pm\delta_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \pm\delta_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \pm\delta_3 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \pm\delta_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ \pm\delta_5 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} \pm \delta_2 \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \pm \delta_3 \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\pm \delta_4 \begin{vmatrix} 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \pm \delta_5 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad V_1\delta_1 \pm V_2\delta_2 \pm V_3\delta_3 \pm V_4\delta_4 \pm V_5\delta_5 = 0.$$

Remarque. — Cette équation représente le lieu des foyers des surfaces de révolution passant par cinq points.

2. Quatre points suffisent pour établir une relation entre les distances lorsqu'ils sont dans un même plan, car en prenant ce plan pour plan des xy on a

$$(2) \qquad \begin{cases} mx_1 + ny_1 + q = \delta_1, \\ mx_2 + ny_2 + q = \delta_2, \\ mx_3 + ny_3 + q = \delta_3, \\ mx_4 + ny_4 + q = \delta_4. \end{cases}$$

Le nombre des relations se réduit à quatre et le nombre des paramètres à trois. En éliminant m, n, q, il vient

$$(3) \qquad S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

Il y a plus : examinons le cas où la surface de révolution représente un cône, les deux foyers se réunissent au sommet et les deux plans directeurs se confondent en un plan unique mené par le sommet ; on a

$$(4) \qquad m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0.$$

En joignant cette relation aux relations (2), on aurait, si on éliminait m, n, p, q, le lieu des sommets des cônes de révolution passant par les quatre points ; mais comme les équations (2) ne contiennent pas p, l'élimination est indépendante de la relation (4), en sorte que le lieu des sommets se trouve représenté par l'équation (3). Donc :

Le lieu des sommets des cônes de révolution, passant par quatre points situés dans un même plan, est identique au lieu des foyers de toutes les surfaces de révolution satisfaisant aux mêmes conditions ; il y a une relation

linéaire et homogène entre les longueurs des génératrices aboutissant aux quatre points.

La surface (3) admet les sections circulaires

$$\begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 = 0, \\ S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_3\delta_3 = 0, \\ S_2\delta_2 \pm S_4\delta_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_4\delta_4 = 0, \\ S_2\delta_2 \pm S_3\delta_2 = 0. \end{cases}$$

3. Considérons cinq points dans un même plan, auquel cas la surface devra passer par une conique fixe; il faut, si l'on prend le plan des cinq points pour plan des x, y, joindre aux relations (2) la relation

$$mx_5 + ny_5 + q = \pm \delta_5,$$

et, si la surface doit représenter un cône, y joindre aussi

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0.$$

Mais, comme tout à l'heure, cette dernière relation reste étrangère à l'élimination, en sorte que le lieu des foyers de *toutes* les surfaces de révolution, passant par une même conique, est identique au lieu des sommets des cônes de révolution menés par la même conique, et l'on sait que ce dernier lieu est formé des deux coniques (réelles ou imaginaires) lieu des foyers dans l'espace de la conique donnée (*).

En même temps se trouve démontré ce théorème de M. Ch. Dupin : Le cône qui a pour sommet un foyer d'une surface de révolution, et pour base une section plane quelconque, est de révolution.

On voit aussi qu'une conique et le lieu de ses foyers dans l'espace jouissent de cette propriété réciproque, qu'il y a *une relation linéaire et homogène entre les dis-*

(*) Ces deux coniques sont l'une réelle, l'autre imaginaire, quand la conique proposée est réelle.

tances de quatre points (pris sur la même courbe) *fixes de l'un à un point quelconque de l'autre.*

4. La circonstance précédente se présentera toutes les fois qu'une surface de révolution, passant par trois points fixes, aura l'un de ses foyers fixe, c'est-à-dire que cette surface sera assujettie à passer par une conique fixe. En effet, le plan des trois points coupe la surface suivant une conique satisfaisant à cinq conditions, puisqu'elle passe par trois points fixes et qu'elle est bitangente à un cercle fixe, qui est un petit cercle de la sphère focale fixe. Ces conditions déterminent, comme il serait facile de le voir, quatre coniques ; et, par suite, toutes les surfaces de révolution passant par trois points et ayant un foyer fixe peuvent être classées en quatre séries correspondant aux quatre coniques. En rapprochant ce résultat de ce qui précède, on voit que :

Lorsqu'une surface de révolution passe par trois points fixes et a un foyer fixe, le lieu de l'autre foyer se compose de huit coniques situées dans des plans perpendiculaires au plan des trois points.

5. Tous ces résultats peuvent se généraliser en considérant dans une surface de révolution, non plus un foyer, mais une sphère inscrite de rayon r ; la distance du foyer à l'un des points fixes sera remplacée par la distance du centre de la sphère tangente à des sphères de même rayon décrites des points fixes comme centres.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 736;

PAR M. H. VIOLLAND,
Élève de l'École Normale.

Soient M *un point d'une courbe et* M_1 *le point correspondant de sa transformée par rayons vecteurs réciproques par rapport à un point* O; n, n_1 *les longueurs des normales à ces deux courbes comprises entre les points* M *et* M_1 *et une perpendiculaire à* OM *menée par le point* O; *enfin* ρ *et* ρ_1 *les rayons de courbure aux points* M *et* M_1. *On a*

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = 2.$$

(NICOLAÏDÈS.)

Soient r, r_1 les rayons vecteurs des deux points; la longueur n de la normale au premier point est

$$n = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Le rayon de courbure ρ au même point est donné par la formule

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}},$$

donc

$$\frac{n}{\rho} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Pour trouver $\frac{n_1}{\rho_1}$, remarquons que les deux points étant transformés par rayons vecteurs réciproques,

$$r_1 = \frac{k^2}{r}.$$

Différentiant deux fois

$$\frac{dr_1}{d\theta} = -\frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\theta^2} = \frac{2k^3}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{k^2}{r^2}\frac{d^2 r}{d\theta^2},$$

remplaçant les quantités r_1, $\frac{dr_1}{d\theta}$, $\frac{d^2 r_1}{d\theta}$ par leurs valeurs dans l'expression de la normale et du rayon de courbure au point M_1, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{n_1}{\rho_1} = \frac{r^2 + r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2};$$

donc

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = \frac{2r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues par MM. Bauquenne, candidat à l'École Normale; Cornu, Richard, élèves de l'École Normale; Mirza-Nizam; F. Richard, Lerosey et Chambard, élèves du collége Chaptal; Ribaucourt,

Grassat, élèves de l'École Polytechnique; Mercé Busco; M. Joseph Sacchi, professeur à Milan. M. Albert Parel remarque qu'il suffit de démontrer la question pour deux cercles. Démonstration géométrique, par les limites, par M. Niewenglowski, élève de l'École Normale. M. Fouret, élève de l'Ecole Polytechnique, démontre la proposition en s'appuyant sur ce que si C et C_1 sont les centres des deux cercles, N et N_1 les extrémités des normales et I le point de rencontre des normales, le rapport anharmonique des points N, M, C, I est égal au rapport anharmonique des points N_1, M_1, C_1 I, et, qu'en outre, les normales sont également inclinées sur les rayons vecteurs. Par une autre démonstration, il trouve que si ε et ε_1, sont les angles de contingence en M et M_1, on a

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 2d\theta.$$

Pour le cas d'un point double d'une anallagmatique, on a

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{n}.$$

A l'occasion de la même question, M. Chemin, aussi élève de l'École Polytechnique, cherche les relations qui existent entre les arcs et les rayons de courbure de deux courbes dont l'une est la podaire de l'autre. Il trouve ainsi, en deux points correspondants,

$$ds' = \frac{r}{\rho}\, ds, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r} - \frac{\rho}{rn};$$

les lettres accentuées se rapportent à la podaire. P.

Questions 737 *et* 738

(voir 2e série, t. III, p. 418);

PAR MM. DELAUNAY ET DE VIARIS,
Élèves du lycée Saint-Louis.

737. *On peut inscrire à un cercle donné une infinité de triangles dont les hauteurs se croisent en un point donné. Trouver, par la Géométrie, la commune enveloppe des côtés de ces triangles.*

LEMME. — *Si du point de rencontre des hauteurs d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés et qu'on prolonge chacune d'elles d'une quantité égale à*

elle-même, les points ainsi obtenus sont sur le cercle circonscrit au triangle.

Démonstration facile.

Soit G le centre du cercle et H le point donné. Menons du point H une sécante quelconque, rencontrant la circonférence aux points A et P. Au milieu de HP, élevons une perpendiculaire à cette ligne qui rencontre la circonférence aux points B et C : d'après le théorème précédent, le triangle ABC répond à la question. Il y en a donc une infinité.

Joignons OP, soit M le point d'intersection avec le côté BC; si nous menons HM, le lemme précédent nous donne $OM + MH = OM + MP = R$. De plus, BC fait des angles égaux avec les droites MO, MH; donc BC enveloppe l'ellipse qui a pour foyer les points O et H et le cercle donné pour cercle directeur.

738. *Une ellipse et l'un de ses cercles directeurs étant tracés, il existe une infinité de triangles simultanément inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse; le point de rencontre des hauteurs est le même pour tous ces triangles.*

Cette question est une réciproque de la précédente. Soit O le centre du cercle directeur, H l'autre foyer de l'ellipse. Menons une tangente quelconque à l'ellipse; soient B et C les points où elle rencontre la circonférence. Du foyer H abaissons une circonférence sur BC et prolongeons-la d'une quantité égale à elle-même. D'après une propriété connue du cercle directeur, le point P ainsi obtenu est sur ce cercle, soit A l'autre point où elle rencontre la circonférence. Dans le triangle ABC, AHP est une hauteur d'après le lemme précédent, et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle est le point H. Les côtés AB et AC sont donc tangents (théorème précédent) à l'ellipse qui a pour foyer les points O et H et

pour cercle directeur le cercle donné. Ceci démontre les propositions indiquées.

Note.—Les questions 737 et 738 ont été résolues par MM. Hatté, Niébylowski, Viant, Tannery, Braga, Calabre, Muzeau, Elliot, Emperauger, Laballe et P. Cagny, Grimaldi, Laisant, Nievenglowski, Lacauchie, Dastarac.

Mêmes questions ;

PAR. MM ARIÈS ET MARMIER,
Élèves de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

LEMME. — *A tout triangle correspond une ellipse ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit, et tangente aux trois côtés du triangle ainsi qu'à ceux du triangle conjugué* (*).

Soient ABC le triangle considéré, (O) le centre du cercle circonscrit, (O′) le point de rencontre des hauteurs, α, β, γ les pieds des médianes, p, q, r les pieds des hauteurs.

Je considère l'ellipse ayant pour foyer le point de concours (O′) des hauteurs et tangente aux trois côtés du triangle. Le lieu des projections du foyer (O′) sur ses tangentes est le cercle passant par ses trois projections p, q, r : donc c'est le cercle des neuf points du triangle. Si, par les deuxièmes points de rencontre de ce cercle avec les côtés, on élève des perpendiculaires, ces perpendiculaires vont concourir en un même point (O), qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. C'est donc le deuxième foyer de l'ellipse.

Le grand axe de cette ellipse est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle.

(*) Le triangle conjugué au triangle ABC s'obtient en abaissant du point O des perpendiculaires sur les côtés du triangle et prolongeant ces perpendiculaires de longueurs égales (*voir* 2e série, t. II, p. 133). P.

De même au triangle conjugué $A'B'C'$ correspond une ellipse ayant pour foyers le point de concours (O) des hauteurs et le point (O') centre du cercle circonscrit à ce triangle qui touche les trois côtés $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ et la longueur de son grand axe est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Mais les triangles conjugués ABC, $A'B'C'$ sont égaux; donc les rayons des cercles circonscrits sont égaux; donc le grand axe de cette deuxième ellipse est le même que le grand axe de la première.

Les deux ellipses étant homofocales et ayant leurs grands axes égaux coïncident; on a donc le lemme énoncé.

Remarque. — Ce qui précède suppose que le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC soient intérieurs à ce triangle, c'est-à-dire que tous les angles du triangle soient aigus.

Dans le cas où le triangle est rectangle, l'ellipse se réduit à son axe, qui est la médiane du triangle rectangle correspondant à l'hypoténuse.

Quand le triangle a un angle obtus, il existe une hyperbole tangente aux trois côtés du triangle, et ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit au triangle.

Il existe une infinité de triangles incrits dans un cercle donné, ayant pour centre le point (O') et pour point de concours des hauteurs un point donné (O).

Je mène un rayon quelconque $O'A$ du cercle donné, je joins le point A au point O, par le milieu M de la ligne OO' je mène une parallèle au rayon $O'A$, et soit p' son point de rencontre avec la droite OA. Les deux triangles OAO', $Op'O'$ sont toujours semblables. Le point A, extrémité de la droite OA, décrit un cercle; donc le point p',

milieu de cette droite, décrira aussi un cercle qui aura pour centre le point M et dont le rayon sera la moitié du rayon du cercle donné.

Je prolonge la droite OA jusqu'à son deuxième point de rencontre avec la circonférence; par ce point, j'élève une perpendiculaire à la droite Ap, et soient B et C les points de rencontre de cette perpendiculaire avec la circonférence donnée. J'achève le triangle ABC. Le cercle des neuf points de ce triangle passe par le point p, il passe par le point α, milieu du côté BC, ce point appartient au cercle décrit du point M, car $M\alpha = Mp'$ à cause de l'égalité des triangles $O'\alpha M$, OpM; son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle; donc il se confond avec le cercle précédemment décrit du point M comme centre.

Il est évident, d'ailleurs, que ce triangle a pour point de concours des hauteurs le point O, puisque $Op' = p'A$.

On peut donc construire une infinité de triangles correspondants aux données. Les ellipses correspondant à tous ces triangles coïncident comme étant toutes homofocales et ayant même grand axe, ce qui donne le premier théorème de M. Serret.

Soit une ellipse donnée : d'un point A de son cercle directeur, je lui mène deux tangentes, qui rencontrent aux points B et C ce cercle directeur. Je dis que la droite BC est aussi tangente à l'ellipse. En effet, au triangle ABC correspond une ellipse tangente aux trois côtés du triangle, ayant pour foyer le centre (O') du cercle directeur et pour longueur du grand axe la longueur du rayon de ce même cercle. Cette ellipse et l'ellipse donnée ont le même foyer, grand axe de même longueur et deux tangentes communes. Si du foyer commun (O') j'abaisse des perpendiculaires sur les deux tangentes communes, les pieds q et r de ces perpendiculaires appartiennent au

cercle lieu des projections des foyers sur les tangentes correspondant à chaque ellipse. Les deux cercles relatifs aux deux ellipses ont donc deux points communs et même rayon; donc ils coïncident, donc les deux ellipses coïncident, et par suite le côté BC est tangent à l'ellipse donnée. On a donc le deuxième théorème de M. Serret.

Généralisation de ces théorèmes.

A tout tétraèdre donné dont les hauteurs concourent en un même point (O′), correspond un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers le point (O′) et le point de concours (O) des normales menées à chaque face par son centre de gravité : cet ellipsoïde est tangent aux quatre faces du tétraèdre et à celles du tétraèdre conjugué (*) : la longueur de son demi grand axe est le tiers du rayon de la sphère circonscrite.

Je considère un ellipsoïde de révolution tangent aux quatre faces du tétraèdre et ayant pour foyer le point de concours O′ des hauteurs. J'abaisse de ce point des perpendiculaires sur les quatre faces. Les pieds de ces perpendiculaires déterminent une sphère qui est la sphère des douze points du tétraèdre. On sait que le centre M de cette sphère est au milieu de la ligne OO′ et que son rayon égale le tiers du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Cette sphère se confond évidemment avec la sphère lieu des projections des foyers sur les plans tangents à l'ellipsoïde, comme ayant quatre points communs. Son centre M est donc le centre de l'ellipsoïde. Le deuxième foyer de l'ellipsoïde s'obtient en prolongeant la droite O′M d'une longueur MO = O′M. Le point O, que l'on obtient ainsi, est précisément le point de rencontre des nor-

(*) *Voir* t. II, p. 135.

males élevées à chaque face par son centre de gravité.

Les points O et O′ étant réciproques l'un de l'autre dans les deux tétraèdres conjugués, il s'ensuit que l'ellipsoïde correspondant au tétraèdre conjugué se confondra avec le premier ellipsoïde, comme ayant les mêmes foyers et le même grand axe.

Remarque. — Si l'un des dièdres du tétraèdre dont les hauteurs concourent en un même point était obtus, il existerait un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le point de concours des normales élevées à chaque face par son centre de gravité, tangent aux quatre faces du tétraèdre donné et à celles de son conjugué.

Il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans une sphère donnée dont les hauteurs concourent en un même point donné (O′) : l'enveloppe des faces de ce tétraèdre est un ellipsoïde de révolution, ayant pour foyers le point (O′) et un deuxième point fixe (O), et pour demi grand axe le tiers du rayon de la sphère donnée.

Ce point fixe est obtenu en joignant le point de concours des hauteurs au centre K de la sphère circonscrite et prenant sur cette droite une longueur $KO = \frac{KO'}{3}$.

Je mène un rayon quelconque KA de la sphère donnée, je joins le point A au point (O′). Du point M, milieu de OO′, je mène une parallèle à la droite KA, et soit p' le point où elle rencontre la droite AO′. Les deux triangles KO′A, MO′p' sont toujours semblables. Le point A décrit la sphère donnée ; le point p' décrit une autre sphère dont le centre est M et le rayon le tiers du rayon de la sphère donnée.

Je prolonge la droite O′A jusqu'à son deuxième point de rencontre p avec la sphère ; j'élève en ce point un plan perpendiculaire à la droite O′p. Ce plan coupe la sphère (K)

suivant un cercle. Le triangle de base du tétraèdre doit être inscrit dans ce cercle, et de plus le point de concours des hauteurs de ce triangle est le point p; car on sait que dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, la projection d'un sommet sur la face opposée est le point de concours des hauteurs de cette face.

Remarquons que si du point (O) nous abaissons une perpendiculaire $O\alpha$ sur ce plan, la distance $O\alpha = O'p' = \frac{O'A}{3}$, d'après un théorème connu. Donc la sphère (M) passe par le point α.

La sphère des douze points d'un des tétraèdres dont les hauteurs se coupent au point O, doit donc passer par les points α, p, p' et avoir un rayon égal au tiers de celui de la sphère (K); donc la sphère des douze points se confond avec la sphère (M). Donc tous les tétraèdres inscrits dans la sphère (K) et ayant pour sphère des douze points la sphère (M), sont tels, que leurs hauteurs concourent au point O. Donc il y en a une infinité. Si nous considérons un de ces tétraèdres, à ce tétraèdre correspond un ellipsoïde de révolution tangent aux quatre faces, et ayant pour foyers les points (O) et (O'), le demi grand axe de cet ellipsoïde étant égal au tiers du rayon de la sphère (K); or les ellipsoïdes correspondant à tous ces tétraèdres se confondent, comme étant de révolution homofocale et ayant même grand axe.

Question 739

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 429);

PAR M. NIÉBYLOWSKI,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Bonaparte.

Équation d'une surface du second degré passant par trois droites. On peut mettre les équations des trois droites données sous la forme suivante :

$$\text{1}^{\text{re}}\text{ droite} \ldots \left\{ \begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{2}^{\text{e}}\text{ droite} \ldots \left\{ \begin{array}{l} C = 0, \\ D = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{3}^{\text{e}}\text{ droite} \ldots \left\{ \begin{array}{l} A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0, \\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0. \end{array} \right.$$

L'équation de la surface du second degré est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'};$$

A, B, C, D *désignent des fonctions du premier degré en* x, y *et* z, *et* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ *sont des constantes.* (E. BARBIER.)

L'équation d'une surface du second degré passant par la deuxième et la troisième droite est

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda C (A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + \mu C (A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') \\ \quad + \nu D (A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + D (A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0; \end{array} \right.$$

λ, μ, ν étant des indéterminées, on peut encore écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda C + \nu D)(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + (\mu C + D)(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0. \end{array} \right.$$

Exprimons que cette surface contient la droite

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \end{cases}$$

il vient

$$(\lambda C + \gamma D)(C\nu + D\delta) + (\mu C + D)(C\gamma' + D\delta') = 0$$

ou

$$(\lambda\gamma + \mu\gamma')C^2 + (\nu\delta + \delta')D^2 + (\lambda\delta + \nu\gamma + \mu\delta' + \gamma')CD = 0;$$

d'où

$$\lambda\gamma + \mu\gamma' = 0,$$
$$\nu\delta + \delta' = 0,$$
$$\lambda\delta + \nu\gamma + \mu\delta' + \gamma' = 0;$$

d'où

$$\nu = -\frac{\delta'}{\delta}, \quad \mu = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \lambda = -\frac{\gamma'}{\delta}.$$

Substituons dans l'équation (2), il vient

$$(C\gamma' + D\delta')(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta)$$
$$- (C\gamma + D\delta)(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0.$$

L'équation peut encore s'écrire

$$AC(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + AD(\alpha\delta' - \delta\alpha')$$
$$+ BC(\beta\gamma' - \gamma\beta') + BD(\beta\delta' - \delta\beta') = 0.$$

Or précisément, si l'on chasse les dénominateurs de l'équation

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'},$$

on arrive aux mêmes résultats; donc l'équation de la surface du second degré passant par les trois droites données est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues de M. Armand Lévy, élève du lycée de Metz, et de M. Hatté, élève du lycée Charlemagne.

Question 740

(voir 2e série, tome IV, page 429);

PAR M. G. DE VIGNERAL.

Deux cercles étant donnés, on inscrit dans l'un d'eux un quadrilatère dont les côtés coupent la corde commune en quatre points. Il est possible d'inscrire dans l'autre cercle une infinité de quadrilatères dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.

(E. BARBIER.)

e et f désignant les points communs aux deux cercles O et O′ et a, b, c, d les points où les côtés d'un quadrilatère inscrit dans le cercle O coupent la corde commune, les six points a, b, c, d, e, f sont en involution.

Or on peut mener d'une manière quelconque dans le second cercle O′ trois côtés d'un quadrilatère inscrit, ces côtés étant assujettis à passer par les points a, b, c; soit d' le point où le quatrième côté coupe la corde commune, les six points a, b, c, d', e, f sont en involution, mais les six points, a b, c, d, e, f y sont aussi, ce qui exige que d et d' soient confondus.

Note. — Autres solutions de MM. Rousset et Arnoye, élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Berger); Marquez Braga, du lycée Saint-Louis; Armand Lévy, du lycée de Metz; Albert Dastarac, élève de l'École Centrale; Niébylowski, du lycée Bonaparte. M. Marmier, de l'École Sainte-Geneviève, remarque que le théorème est vrai pour deux coniques quelconques.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

II.

Ernest Lamarle, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand. — *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*. In-4 de 104 pages. (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XXXV; 1865.)

Lorsqu'on plonge dans un liquide visqueux un polyèdre dont les arêtes sont solidifiées et existent seules, par exemple un polyèdre dont les arêtes sont formées par des fils de fer, il arrive que des lames de liquide s'attachent à chaque arête solide et se joignent les unes aux autres dans l'intérieur du corps en donnant lieu à des compartiments terminés par des faces planes ou courbes. M. J. Plateau, le célèbre physicien belge, qui a le premier étudié ce genre de phénomène, a trouvé qu'il obéit aux lois suivantes : 1° *dans tout système de lames minces en équilibre stable, la somme des aires est un minimum;* 2° *l'aire de chaque lame est un minimum entre les limites qui la circonscrivent;* 3° *la courbure est constante en chaque point d'une même lame et proportionnelle à la différence des pressions qui agissent de part et d'autre;* 4° *les lames issues d'une même arête liquide sont au nombre de trois;* 5° *les arêtes issues d'un même sommet liquide sont au nombre de quatre;* 6° *les lames issues d'une même arête liquide forment deux à deux des angles égaux : de même, les arêtes issues d'un même sommet liquide forment deux à deux des angles égaux.* Ces lois sont toutes susceptibles de démonstrations rigoureuses; mais si les trois premières sont en partie déjà démontrées, les autres, exclusivement fondées sur

l'expérience, laissent subsister, au point de vue théorique, une énorme lacune. M. Lamarle s'est proposé de combler cette lacune, en montrant que les limitations numériques observées résultent nécessairement de la *loi du minimum des aires.*

Le Mémoire de M. Lamarle se partage en deux parties distinctes : l'une purement mathématique, l'autre à la fois théorique et expérimentale. Dans la première, la seule dont nous nous occuperons, l'auteur est amené à résoudre ce problème : *De combien de manières peut-on découper la surface d'une sphère en polygones convexes dont les angles soient tous de* 120 *degrés?* Il arrive à une équation très-simple du premier degré à trois inconnues, et trouve d'abord que parmi toutes les solutions en nombre infini, dix-neuf seulement peuvent être admises. Mais ces dix-neuf solutions, examinées de plus près, se réduisent à sept combinaisons géométriquement possibles et que l'auteur apprend à construire, et, après divers développements trigonométriques, il arrive à démontrer les trois dernières lois.

Le problème que M. Lamarle s'était posé offrait de grandes difficultés et appelait naturellement le calcul des variations. M. Lamarle a évité ce calcul avec beaucoup de bonheur et n'a eu besoin que des principes de la Géométrie élémentaire et des premières notions de l'Analyse différentielle. On ne peut rien lire de plus élégant que ce Mémoire, où la Géométrie et le calcul sont tour à tour employés et conduisent au but par la voie la plus rapide.

III.

Plateau (J.) — *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur.* 6 Mémoires in-4; 1842-61. (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XVI à XXXIII.)

Ces ingénieux Mémoires, quoique très-célèbres, sont peu connus. Ils font partie d'une collection qui ne se trouve que dans les grandes Bibliothèques, et les exemplaires tirés à part, en petit nombre, sont difficiles à réunir. Nos lecteurs appren-

dront avec plaisir que M. Plateau se propose de rassembler toutes ses recherches en un seul ouvrage, qui ne pourra manquer d'intéresser et les physiciens et les géomètres.

IV.

Plateau (J.). — *Sur un problème curieux de magnétisme.* 58 pages; 1864. (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XXXIV.)

M. Plateau s'est posé ce problème : Ne serait-il pas possible de soutenir en l'air une aiguille aimantée, sans aucun point d'appui et dans un état d'équilibre stable, par des actions émanées d'autres aimants convenablement disposés? Quelques essais sur des combinaisons de barreaux aimantés, qui semblaient devoir produire, au moins sur l'un des pôles, l'effet attendu, ayant échoué, M. Plateau a été porté à soupçonner que le problème général était impossible, et il a cherché à démontrer cette impossibilité par le calcul. La difficulté du problème semblait inextricable, car il fallait supposer absolument quelconques le nombre des centres magnétiques agissant sur l'aiguille, leur distribution, enfin l'espèce et l'intensité de leurs magnétismes; mais M. Plateau, qui manie le calcul aussi bien que l'expérience, et ce n'est pas peu dire, est venu à bout de toutes les difficultés. En exposant cette démonstration d'un fait négatif, M. Plateau évite à d'autres personnes des tentatives inutiles et une perte de temps; d'ailleurs l'impossibilité même de l'équilibre stable désiré, la manière dont elle se manifeste dans le calcul, et enfin la cause qui la détermine, constituent des faits très-curieux.

V.

Paul de Saint-Robert. — *Principes de Thermodynamique.* In-8 de VIII-210 pages; 1865.

Pour Aristote, le feu est un être à part, un élément; pour Descartes, c'est un mouvement des dernières parties des corps.

« C'est une telle agitation des petites parties des corps terrestres qu'on nomme encore la chaleur, soit qu'elle ait été excitée par la lumière du Soleil, soit par quelque autre cause. » (*Principes*, IV, 29.) « On doit remarquer que cette agitation des petites parties des corps terrestres est ordinairement cause qu'elles occupent plus de place que lorsqu'elles sont en repos, ou bien qu'elles sont moins agitées. » (*Principes*, 31.) En 1738, l'Académie des Sciences proposa, comme sujet de prix, la question de la nature et de la propagation du feu. La plupart des concurrents, et entre autres le grand Euler, s'arrêtèrent à l'hypothèse du mouvement : « *Ad phenomena explicanda*, » dit ce dernier, « *motus quicumque vehemens minimarum particularum, pro quo innumerabiles hypotheses excogitari possunt, est sufficiens.* » Deux concurrents, M[me] la Marquise du Châtelet et Voltaire, soutinrent l'existence corporelle et substantielle de la chaleur. La première formula de la manière la plus nette les lois d'une théorie longtemps adoptée : la chaleur est pour elle une substance étendue, divisible, non *pondérable*, dont les molécules se repoussent; c'est un être d'une nature mitoyenne, ni esprit, ni matière, ni espace. Voltaire, au contraire, attribue un poids au feu ou à la chaleur. Voici la raison qu'il en donne : « *Ayant fait peser des masses énormes de fer froides et incandescentes, et leur ayant trouvé le même poids, j'en conclus que le feu qui les pénétroit leur donnoit autant de poids que leur dilatation leur en faisoit perdre, et que par conséquent le feu est réellement pesant.* » Toutefois, la théorie du fluide calorifique eut peu de succès jusqu'aux brillantes découvertes de Lavoisier, époque où elle devint dominante. Aujourd'hui elle croule de toutes parts, et l'on revient à l'hypothèse plus satisfaisante du mouvement des dernières particules des corps. Sous le nom de *Thermodynamique*, M. de Saint-Robert expose en peu de pages la théorie des effets mécaniques de la chaleur et celle de la chaleur produite par les agents mécaniques, d'après les principaux fondateurs de cette science nouvelle, Sadi Carnot, Mayer, Joule, Thomson, etc. Le chapitre VII, dû entièrement à l'auteur et que celui-ci présente comme un essai, est consacré au mouvement des projectiles

dans les armes à feu. Nous signalons l'ouvrage de M. de Saint-Robert aux personnes compétentes.

VI.

Édouard Villié, Ingénieur des Mines. — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* Première Thèse : *Sur la détermination d'un corps ayant un potentiel donné pour les points qui lui sont extérieurs.* Deuxième Thèse : *Sur l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.* In-4 de IV-90 pages; 1865.

La première Thèse est divisée en quatre parties. Le premier chapitre contient les théorèmes sur l'attraction dus à George Green, à M. Chasles et à Gauss. L'auteur y ajoute quelques remarques et termine en cherchant, avec M. Lamé, la condition pour qu'une fonction de trois variables puisse, égalée à une constante, représenter des surfaces d'égal potentiel dues à l'attraction d'un corps inconnu. Le second chapitre est consacré à la recherche d'une série de solutions du problème qui fait le principal objet de ce travail. Les corps obtenus sont tous limités par des surfaces de niveau. Tous ceux qui répondent à la question ont même masse, même centre de gravité et mêmes axes principaux d'inertie (en direction). L'auteur démontre qu'une surface quelconque étant donnée, on peut toujours la considérer comme une des surfaces extérieures de niveau, dues à l'attraction d'un corps dont le potentiel est, à un facteur constant près, déterminé pour les points extérieurs au corps. Le chapitre III donne une infinité d'autres solutions déduites des premières à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques, méthode qui semble ici employée pour la première fois dans une question de physique mathématique. Le chapitre IV résume quelques théorèmes de calcul intégral, conséquences de ce qui précède.

La seconde Thèse se rapporte à un sujet traité par Mac-Laurin, Jacobi, Meyer et M. Liouville, dont l'auteur résume les travaux. Il termine par une recherche qui lui est personnelle, celle de l'équation aux différentielles partielles qui lie la pression à la densité dans une masse fluide en équilibre. L'équilibre ne peut avoir lieu si la vitesse de rotation du système n'est pas constante. Si le mouvement de rotation de la Terre n'était pas uniforme, comme on cherche à le démontrer, la masse des mers serait donc exposée à des perturbations d'équilibre et nous menacerait sans doute de grandes catastrophes, mais dans un temps fort éloigné.

En résumé, ces Thèses font honneur à M. Villié. On voit qu'il connaît les œuvres des maîtres et qu'il sait y ajouter.

VII.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. III, 2e cahier. In-8 de 231 à 498 pages; 1865.

V.-A. Le Besgue (p. 231 à 274). *Tables donnant pour la moindre racine primitive d'un nombre premier ou puissance d'un nombre premier : 1° les nombres qui correspondent aux indices; 2° les indices des nombres premiers et inférieurs au module.* — Ces Tables ne diffèrent de celles de Jacobi (*Canon arithmeticus*) que par le choix des racines primitives qui ont servi à leur formation. C'est toujours la plus petite racine qui a été employée pour chaque module. Les trois Tables de Jacobi ont été réunies en une seule, qui contient, rangés par ordre de grandeur, les modules des nombres premiers et puissances de nombres premiers. La disposition est la même que celle du *Canon*. Pour les modules 2^n, on a évité l'emploi des compléments, et l'usage de la Table devient par là un peu plus simple. Les Tables de Jacobi vont de 1 à 1000, celles-ci s'arrêtent à 200. Si elles venaient à être continuées, on les réduirait de moitié. Les Tables ont été construites par M. Hoüel. Elles occupent les

pages 269 à 274 (*). Nous croyons savoir que M. Le Besgue se propose d'en calculer de plus étendues.

A. Baudrimont (p. 418 à 444). *Démonstrations élémentaires relatives à la théorie des nombres premiers.* — L'auteur se plaint que nos Traités d'Arithmétique se bornent à enseigner les calculs nécessaires aux besoins de la vie, et il espère qu'un jour viendra où on y trouvera la théorie générale des nombres. Cela nous paraît difficile, car la théorie générale des nombres est loin d'être faite, et le peu que nous en savons exige la connaissance des parties les plus relevées de l'analyse. Après ce début, M. Baudrimont énonce des propositions qu'il croit neuves et intéressantes, comme par exemple que *tous les nombres premiers sont de l'une des formes* $6n \pm 1$, que *la formule* $mx + r$, *où* m *et* r *sont premiers entre eux, ne donne pas toujours des nombres premiers*, etc. M. Baudrimont conclut de là que la formule $mx + r$, qui a été l'objet de tant de travaux, *méritait à peine l'attention qu'on lui a donnée.* — *N. B.* Les gens qui ont ainsi perdu leur peine s'appelaient Legendre, Dirichlet, Gauss, etc.

Tout le monde sait que $mx + r$ ne donne pas toujours des nombres premiers, mais démontrer que cette formule en donne un nombre infini est une chose un peu moins à la portée du vulgaire.

A. Baudrimont (p. 445 à 447). *Un tétraèdre quelconque est inscriptible dans une sphère.* — M. Baudrimont prétend que ce théorème *important* n'est donné dans aucune Géométrie; il fallait ajouter : connue de M. Baudrimont. Cette proposition est de celles qu'on peut laisser trouver à la sagacité du lecteur, parce qu'elles ont leurs analogues pour l'énoncé et pour la démonstration dans la Géométrie plane. Voici un court extrait qui mettra le lecteur à même de juger en connaissance de cause du mérite de M. Baudrimont comme géomètre :

« Soit un triangle donné : un des côtés pourra être consi-

(*) M. Hoüel vient de reproduire ces Tables avec une introduction de 8 pages dans un opuscule intitulé : *Tables arithmétiques pour servir d'appendices à l'introduction à la Théorie des nombres de M. Le Besgue.* Paris, Gauthier-Villars; in-8.

déré comme la corde d'un cercle, et pourra, par conséquent, *toucher* une circonférence par ses deux extrémités, pourvu qu'il puisse y être contenu.

» Si le troisième angle du triangle donné ne touche pas la circonférence, il est ÉVIDENT qu'on pourra l'y amener en faisant varier la grandeur du cercle, sans que pour cela les deux autres points cessent d'être en contact avec la circonférence.

» On peut donc démontrer ainsi qu'un triangle est inscriptible dans un cercle. »

On regrette de trouver de pareilles élucubrations dans les *Mémoires* d'une Académie qui compte parmi ses membres MM. Abria, Hoüel, Lespiault, Le Besgue, pour ne parler que des géomètres.

VIII.

LONCHAMPT (A.) — *Recueil de problèmes posés dans les examens d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Centrale, ainsi que dans les conférences des principales Écoles préparatoires* (Exercices et solutions). Vol. grand in-8 lithographié de VIII-480 pages. Librairie Gauthier-Villars. — Prix : 8 francs.

Cet ouvrage renferme 870 problèmes ou théorèmes. C'est donc une mine très-riche d'exercices, qui ne peuvent qu'intéresser les candidats à nos Écoles.

IX.

GERONO et CASSANAC. — *Éléments de Géométrie descriptive à l'usage des aspirants aux Écoles du Gouvernement*. 2 vol. in-8; texte, IV-244 pages, et atlas; 1866.

Cette nouvelle édition, revue et augmentée, contient dans un Appendice des notions relatives au changement des plans de projection et aux plans cotés.

X.

ARISTIDE QUINTILIEN. — *Passage du* Traité de la Musique, *relatif au nombre nuptial de Platon*, traduit par M. *Vincent* et par M. *H. Martin*, etc. In-4 de 14 pages; 1865.

« On ne s'imagine, dit Pascal, Platon et Aristote qu'avec de grandes robes de pédants. C'étaient des gens honnêtes et, comme les autres, riant avec leurs amis; et quand ils se sont divertis à faire leurs *Lois* et leur *Politique*, ils l'ont fait en se jouant. » Un savant géomètre, qui a fait une étude approfondie de Platon, et qui n'est pas éloigné de penser comme Pascal, nous apprend que le fameux nombre nuptial désigne l'âge le plus propre à contracter mariage. Platon le cache sous une énigme qu'il propose moitié sérieusement, moitié en riant. Si cela est, le nombre d'Aristide Quintilien n'a aucun rapport avec le nombre nuptial. Il faut croire, toutefois, que ce passage a de l'importance, puisque deux hellénistes distingués se sont donné la peine de le traduire. Cette double traduction est suivie de deux Notes de M. Martin, l'une sur l'époque de l'astronome Ptolémée, l'autre sur l'époque d'Aristide Quintilien. Le premier a vécu sous les règnes d'Adrien, d'Antonin et de Marc-Aurèle, au second siècle de notre ère. Aristide Quintilien paraît être un peu antérieur à Ptolémée. P.

CORRESPONDANCE.

Dans notre dernier numéro, nous avons répondu à une difficulté au sujet de l'équation en λ. M. G. Salmon veut bien nous avertir que notre réponse ne contient pas *toute la vérité*. La vérité tout entière c'est que *le chan-*

gement d'axes ne change pas les racines de l'équation en λ; car si, dans un système d'axes, on a

$$P + \lambda Q = RS = 0,$$

on aura, dans un nouveau système,

$$P' + \lambda Q' = R'S' = 0,$$

et la même valeur de λ donne une nouvelle équation qui représente encore deux droites.

Au surplus, M. Salmon observe que les coefficients de l'équation en λ sont des *invariants* (ce qui résulte évidemment de la démonstration précédente). Cette dernière remarque nous a aussi été adressée par M. Painvin.

P.

QUESTIONS.

755. Soient F, F' les foyers d'une ellipse de Cassini, C son centre, et P un point quelconque sur la courbe. Alors la normale en P fera avec FP un angle égal à celui que fait la droite CP avec F'P. (STREBOR.)

756. Soient F, F' deux points fixes sur une surface sphérique, et considérons la courbe, lieu d'un point P, tel, que $\operatorname{tang} \frac{1}{2} FP \operatorname{tang} \frac{1}{2} F'P = \text{const.}$ Le grand cercle normal en P à cette courbe fera avec FP un angle égal à celui que fait avec F'P le grand cercle passant par P et le milieu de l'arc FF'. (STREBOR.)

757. On donne une courbe de troisième classe ayant une tangente double : les points de contact de cette tangente

et de la courbe sont A, B. D'un point quelconque pris dans le plan de la courbe donnée, ou mène à celle-ci trois tangentes qui coupent la tangente AB aux points M, N, P.

On a toujours

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = \frac{\rho_A}{\rho_B},$$

ρ_A et ρ_B étant les rayons de courbure de la courbe donnée en A et B. [MANNHEIM (*).]

758. Le nombre a n'étant pas divisible par p, nombre premier impair, on sait que $a^{\frac{p-1}{2}} = pA \pm 1$: le reste ± 1 est représenté par $\left(\frac{a}{p}\right)$, notation de Legendre. Cela posé, on a

$$\sum (ax^2 + b)^{p-1} = pB - \left[1 + \left(\frac{-ab}{p}\right)\right],$$

$$\sum\sum (ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = pC + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

a, b, c sont des entiers non divisibles par p; A, B, C sont entiers; les sommes sont prises en donnant à x et à y les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. (LE BESGUE.)

759. Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ sont des entiers

---

(*) M. Mannheim nous fait remarquer que la solution de la question 605, insérée à la page 173 du tome III de la deuxième série, laisse à désirer.

On fait usage de l'équation

$$\lambda\beta^2\gamma + \mu\gamma^2\alpha + \nu\alpha^2\beta = 0,$$

qui n'est pas l'équation la plus générale des courbes du troisième degré à la fois inscrites et circonscrites au triangle dont les côtés ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

$< p$ et non divisibles par p. On représente par S_m^0, S_m le nombre des solutions des équations indéterminées

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 = py,$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py,$$

en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_m$ parmi les nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

On demande la démonstration des formules :

(1) $$(p-1)S_m = S_{m+1}^0 - S_m^0,$$

(6) $$S_m^0 - p^{m-1} = p\,(S_{m-2}^0 - p^{m-3})\left(\frac{-a_{m-1}a_m}{p}\right),$$

(2) $$S_1^0 - 1 = 0,$$

(4) $$S_2^0 - p = (p-1\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right),$$

(3) $$S_1 - 1 = \left(\frac{-a_1a_2}{p}\right),$$

(7) $$S_{2n+1}^0 - p^{2n} = 0,$$

(8) $$S_{2n}^0 - p^{2n-1} = p^{n-1}(p-1)\left[\frac{(-1)^n a_1a_2\ldots a_{2n}}{p}\right],$$

(5) $$S_2 - p = -\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right),$$

(9) $$S_{2n} - p^{2n-1} = -p^{n-1}\left[\frac{(-1)^n a_1a_2\ldots a_{2n}}{p}\right],$$

(10) $$S_{2n+1} - p^{2n} = \left[\frac{(-1)^{n+1} a_1a_2\ldots a_{2n+1}}{p}\right].$$

Les numéros indiquent l'ordre à suivre dans les démonstrations, qui sont fort simples. (LE BESGUE.)

Note du Rédacteur. — M. Camille Jordan a donné ces formules et en a indiqué la vérification dans les *Comptes rendus* du 19 mars 1866. Dans les *Comptes rendus* du 1er avril, M. Le Besgue a montré que ces formules revenaient à celles qu'il a données dans le tome II (1837) du *Journal de M. Liouville*. P.

SUR LE NOMBRE DES CONIQUES QUI SATISFONT A CINQ CONDITIONS DONNÉES;

D'après M. CHASLES.

Nous avons déjà parlé de la méthode de M. Chasles pour résoudre certains problèmes relatifs aux courbes planes, et que son illustre auteur a étendue successivement aux coniques dans l'espace et aux surfaces du second ordre. En attendant le second volume du *Traité des coniques*, qui doit faire connaître tous les détails de cette admirable méthode, nos lecteurs seront sans doute bien aises d'en avoir une idée. C'est pourquoi nous allons exposer plus spécialement et appliquer aux seules coniques le procédé de substitution géométrique d'un caractère si original et d'une si grande portée. Une suite d'énoncés, empruntés textuellement à un Mémoire de M. Chasles, donnera les principales propriétés des systèmes de coniques dont la connaissance est indispensable pour l'application de la méthode.

I.

Les propriétés d'un système de coniques assujetties à quatre conditions dépendent essentiellement de deux nombres, que M. Chasles appelle les *caractéristiques* du système, et qui sont : 1° le nombre μ de ces coniques qui passent par un point donné; 2° le nombre ν de ces coniques qui touchent une droite donnée. Le symbole (μ, ν) représentera un pareil système, et tous les systèmes qui ont les mêmes caractéristiques, quoique satisfaisant à des conditions bien différentes, auront en commun une

foule de propriétés ayant leur source dans cette communauté de caractéristiques. En général, nous désignerons par Z, Z', etc., diverses conditions auxquelles sont assujetties diverses coniques. Si la condition Z est de passer par un point donné, nous poserons $Z = 1$ p., si par deux points, $Z = 2$ p., etc. De même $Z = 2$ d., 3 d., etc., exprimeront la condition de toucher deux droites, trois droites, etc.

Pour exprimer qu'un système de coniques assujetties aux quatre conditions Z, Z', Z'', Z''' a pour caractéristiques μ et ν, nous écrirons

$$(Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\mu, \nu).$$

Par exemple, comme parmi les coniques qui passent par quatre points il n'y en a qu'*une* qui passe par un point donné, et *deux* qui touchent une droite donnée, nous écrirons

$$(4 \text{ p.}) \equiv (1, 2);$$

nous aurons de même

$$(2 \text{ p.}, 2 \text{ d.}) \equiv (4, 4).$$

II.

Dans un système de coniques assujetties à quatre conditions, il existe toujours un certain nombre de coniques qui forment des cas particuliers, soit des coniques représentées par deux droites, soit des coniques réduites à une droite limitée à deux points ou *coniques infiniment aplaties.* Ces coniques exceptionnelles interviennent dans un grand nombre de questions, et elles ont créé jusqu'ici des difficultés, parce que, n'en connaissant pas le nombre dans chaque question, on n'en pouvait pas tenir compte. Or ce nombre est lié très-simplement aux caractéristiques μ et ν; mais il nous faut démontrer d'abord deux théorèmes d'une importance capitale dans la théorie actuelle, et qui sont une extension naturelle du *principe de cor-*

respondance exposé par l'auteur il y a une dizaine d'années (*Comptes rendus,* 24 décembre 1855.)

Théorème I. — *Lorsqu'on a sur une droite* L *deux séries de points x et u tels, qu'à un point x correspondent α points u, et, à un point u, β points x, le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est $\alpha + \beta$.*

En effet, représentons par les lettres x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L : on a, entre ces distances, une relation telle que

$$x^{\beta}(\mathrm{A}u^{\alpha}+\mathrm{B}u^{\alpha-1}+\ldots)+x^{\beta-1}(\mathrm{A}'u^{\alpha}+\mathrm{B}'u^{\alpha-1}+\ldots)+\ldots=0,$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont donnés par l'équation

$$\mathrm{A}x^{\alpha+\beta}+(\mathrm{B}+\mathrm{A}')x^{\alpha+\beta-1}+\ldots=0.$$

Il suffit donc de prouver que le coefficient A n'est pas nul. Or, si le point u est à l'infini, l'équation entre x et u, mise sous la forme

$$x^{\beta}\left(\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{u}+\ldots\right)+x^{\beta-1}\left(\mathrm{A}'+\frac{\mathrm{B}'}{u}+\ldots\right)+\ldots=0,$$

se réduit à

$$\mathrm{A}x^{\beta}+\mathrm{A}'x^{\beta-1}+\ldots=0;$$

et comme il doit toujours y avoir β points x correspondants au point u, le terme $\mathrm{A}x^{\beta}$ existe nécessairement dans cette équation et A ne peut pas être nul.

Théorème II. — *Lorsque deux séries de droites* X *et* U *passent par un même point, si à une droite* X *correspondent α droites* U, *et, à une droite* U, β *droites* X, *il existera $\alpha + \beta$ droites* X *qui coïncideront avec les droites correspondantes* U.

Ce théorème est une conséquence immédiate du précé-

dent, car on peut supposer que les droites X et U soient déterminées par deux séries de points x et u situés sur une même droite L.

III.

Revenons maintenant aux coniques exceptionnelles; leur nombre est donné par le théorème suivant :

Dans tout système de coniques (μ, ν), *le nombre des coniques infiniment aplaties est* $(2\mu - \nu)$, *et le nombre des coniques représentées par deux droites est* $2\nu - \mu$.

Soit x un point pris sur une droite L. Par ce point il passe μ coniques du système. Chacune d'elles rencontre la droite en un point u. Il y a donc μ points u qui correspondent au point x, et réciproquement à chaque point u correspondent μ points x. Donc, d'après le lemme I, il y aura 2μ points x qui coïncident avec le point u correspondant, ce qui semble indiquer qu'il y a 2μ coniques tangentes à la droite L. Mais on sait que le nombre de ces coniques est ν. La différence $2\mu - \nu$ doit donc tenir au nombre des coniques infiniment aplaties qui rencontrent la droite en deux points coïncidents, sans être tangentes à la droite. Le nombre de ces coniques est donc $2\mu - \nu$.

La seconde partie de l'énoncé se démontre d'une manière analogue. Par un point S menons une tangente X à une conique du système. On pourra par le point S mener une seconde tangente U; comme, par hypothèse, il y a ν coniques qui touchent la droite X, il y aura donc ν droites U correspondant à la droite X, et réciproquement, à chaque droite U correspondront ν droites X. Donc (lemme II) le faisceau (X, U) aura 2ν droites doubles qui correspondront à autant de coniques qui passeront par le point S, à moins qu'il ne s'agisse des coniques réduites à deux droites, pour lesquelles X coïncide avec U sans que la

conique passe par le point S. Or μ est le nombre des coniques qui passent par le point S. Donc $2\nu - \mu$ sera le nombre des coniques réduites à deux droites.

IV.

En général, les deux nombres $2\mu - \nu$ et $2\nu - \mu$, dont la somme $\mu + \nu$ indique le nombre total des coniques exceptionnelles, peuvent être obtenus d'une foule de manières. Il suffit de comparer des théorèmes démontrés de deux façons différentes. Dans l'une, les coniques exceptionnelles n'interviennent pas ; dans l'autre, elles influent sur le résultat. La différence des deux résultats fait connaître le nombre de ces coniques. En voici un exemple :

Soient P et P' deux points du plan. Sur une droite D prenons un point x; comme l'enveloppe des polaires du point P, par rapport aux diverses coniques du système, est de l'ordre μ (*voir* l'article suivant, n° XII), il passera, par le point x, μ polaires du point P. Les polaires du point P', relatives aux mêmes coniques, couperont la droite D en μ points u. Ainsi à un point x correspondront μ points u sur la droite D, et réciproquement. Donc, en vertu de théorème I (p. 195), il y aura 2μ couples de points u et x, coïncidant sur la droite D. Mais les polaires des points P et P' se coupant sur la droite D, le point d'intersection sera la polaire de la droite PP'. Donc, sur la droite D, il y aurait 2μ pôles de la droite PP'. Mais le lieu des pôles d'une droite, relativement aux diverses coniques du système, est une courbe de l'ordre ν (article suivant, n° I). Donc il ne peut y avoir que ν pôles sur cette droite. La différence $2\mu - \nu$ ne doit provenir que des coniques exceptionnelles infiniment aplaties, qui ne donnent qu'une solution apparente. Donc $2\mu - \nu$ est le nombre des coniques infiniment aplaties.

Observons qu'on doit avoir $2\mu - \nu > 0$, $2\nu - \mu > 0$,

en sorte que chaque caractéristique doit être comprise entre la moitié et le double de l'autre caractéristique.

V.

Occupons-nous maintenant de trouver les caractéristiques d'un système (μ, ν) de coniques assujetties à quatre conditions. L'observation démontre que le nombre des coniques de ce système, assujetties à une cinquième condition Z, est toujours de la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, α et β étant des entiers positifs ou nuls. L'article suivant (p. 204) en donne de nombreux exemples. Si quelque condition, ce qu'on n'a pas encore rencontré, échappait à cette loi, les problèmes où entre cette condition échapperaient par le fait même aux formules que nous allons démontrer.

α et β seront dits les paramètres de la condition Z, et de même α', β' ceux de la condition Z', etc.

Il faut d'abord avoir sous les yeux les caractéristiques des systèmes élémentaires, c'est-à-dire de ceux dont les conditions consistent à passer par des points ou à toucher des droites. Ces caractéristiques sont réunies dans le tableau suivant, qui est l'expression de théorèmes bien connus :

$$(4\text{ p.}) \equiv (1, 2),$$
$$(3\text{ p.}, 1\text{ d.}) \equiv (2, 4),$$
$$(2\text{ p.}, 2\text{ d.}) \equiv (4, 4),$$
$$(2\text{ p.}, 3\text{ d.}) \equiv (4, 2),$$
$$(4\text{ d.}) \equiv (2, 1)$$

Introduction de la condition Z. — On a, en désignant par $N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}})$ le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions,

$$(3\text{ p.}, Z) \equiv [N(3\text{ p.}, Z, 1\text{ p.}),\ N(3\text{ p.}, Z, 1\text{ d.})],$$
$$\equiv [N(4\text{ p.}, Z),\ N(3\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z)].$$

Or les caractéristiques du système (4 p.) étant 1 et 2, et

celles de (3 p., 1 d.) étant 2, 4, nous aurons par les notations adoptées

$$N(4\,p., Z) = \alpha + 2\beta, \quad N(3\,p., 1\,d., Z) = 2\alpha + 4\beta.$$

Donc

1° $$(3\,p., Z) \equiv (\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + 4\beta);$$

on a ensuite

2° $$\begin{aligned}(2\,p., Z, 1\,d.) &\equiv [N(3\,p., 1\,d., Z),\ N(2\,p., 2\,d., Z)],\\ &\equiv (2\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 4\beta);\end{aligned}$$

3° $$\begin{aligned}(1\,p., 2\,d., Z) &\equiv [N(2\,p., 2\,d., Z),\ N(1\,p., 3\,d., Z)],\\ &\equiv (4\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 2\beta);\end{aligned}$$

4° $$\begin{aligned}(3\,d., Z) &\equiv [N(1\,p., 3\,d., Z),\ N(4\,d., Z)],\\ &\equiv (4\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Nous avons donc ainsi les caractéristiques de tous les systèmes où la condition Z entre avec trois conditions élémentaires.

Introduction de la condition Z′. — On a trois couples de caractéristiques à calculer :

1° $$\begin{aligned}(2\,p., Z, Z') &\equiv [N(3\,p., Z, Z'),\ N(2\,p., 1\,d., Z, Z')],\\ &\equiv [\alpha'(\alpha + 2\beta) + \beta'(2\alpha + 4\beta),\\ &\qquad \alpha'(2\alpha + 4\beta) + \beta'(4\alpha + 4\beta)],\\ &\equiv (\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta',\ 2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta'),\end{aligned}$$

en posant, pour abréger, $\Sigma\alpha\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha'$;

2° $$\begin{aligned}(1\,p., 1\,d., Z, Z') &\equiv [N(2\,p., 1\,d., Z, Z'),\\ &\qquad N(1\,p., 2\,d., Z, Z')],\\ &\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta', \\ (4\alpha + 4\beta)\alpha' + (4\alpha + 2\beta)\beta' \end{bmatrix},\\ &\equiv (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta',\\ &\qquad 4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta');\end{aligned}$$

3° $(2\,\mathrm{d.}, Z, Z') \equiv [N(1\,\mathrm{p.}, 2\,\mathrm{d.}, Z, Z'),\; N(3\,\mathrm{d.}, Z, Z')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} 4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta', \\ (4\alpha + 2\beta)\alpha' + 2\alpha + \beta)\beta' \end{bmatrix},$$

$$\equiv (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta',\quad 4\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + \beta\beta').$$

Introduction de la condition Z''. — On a :

1° $(1\,\mathrm{p.}, Z, Z', Z'') \equiv [N(2\,\mathrm{p.}, Z, Z', Z''),\; N(1\,\mathrm{p.}, 1\,\mathrm{d.}, Z, Z', Z'')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} (\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\beta'', \\ (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta')\beta'' \end{bmatrix},$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \alpha\alpha'\alpha'' + 2\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 4\beta\beta'\beta'', \\ 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'' \end{bmatrix};$$

2° $(1\,\mathrm{d.}, Z, Z', Z'') \equiv [N(1\,\mathrm{p.}, 1\,\mathrm{d.}, Z, Z', Z''),\; N(2\,\mathrm{d.}, Z, Z', Z'')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' \\ \quad + 2\beta\beta'\beta'', \\ (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (4\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + \beta\beta')\beta'' \end{bmatrix},$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'', \\ 4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta'' + \beta\beta'\beta'' \end{bmatrix}.$$

Introduction de la condition Z'''. — On a

$$(Z, Z', Z'', Z''')$$
$$\equiv [N(1\,\mathrm{p.}, Z, Z', Z'', Z'''),\; N(1\,\mathrm{d.}, Z, Z', Z'', Z''')],$$
$$\equiv (a, b);$$

$$\begin{aligned} a &= (\alpha\alpha'\alpha'' + 2\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 4\beta\beta'\beta'')\alpha''' \\ &\quad + (2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'')\beta''' \\ &= \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' \\ &\quad + 2\beta\beta'\beta''\beta'''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= (2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'')\alpha''' \\ &\quad + (4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta'' + \beta\beta'\beta'')\beta'' \\ &= 2\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' \\ &\quad + 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + 2\beta\beta'\beta''\beta'''. \end{aligned}$$

VI.

Si maintenant on veut le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions Z, Z', Z'', Z''', Z^{IV}, on aura, α^{IV} et β^{IV} étant les paramètres de la nouvelle condition,

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) = \alpha^{\text{IV}} a + \beta^{\text{IV}} b,$$

ou, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} & N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) \\ & = \alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{IV}} + 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta^{\text{IV}} + 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{IV}} \\ & \quad + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} + 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} + \beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}}. \end{aligned}$$

Telle est la formule que nous voulions établir. Elle contient dix paramètres; mais il n'entre jamais dans un terme deux paramètres relatifs à la même condition. Les coefficients sont les nombres de solutions des systèmes élémentaires.

VII.

Application. — *Trouver le nombre des coniques qui passent par un point, touchent deux droites données et une conique donnée.*

Nous avons ici

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad (\text{déf.}),$$
$$\alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = \beta'' = 1 \quad (\text{déf.}),$$
$$\alpha''' = \alpha^{\text{IV}} = 2, \quad \beta''' = \beta^{\text{IV}} = 2 \quad (\text{art. suiv., XI, coroll.});$$

il en résulte

$$\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{IV}} = 0, \quad \Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta^{\text{IV}} = 0,$$
$$\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{IV}} = \alpha\alpha'''\alpha^{\text{IV}}\beta'\beta'' = 4,$$
$$\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} = \alpha\alpha'''\beta'\beta''\beta^{\text{IV}} + \alpha\alpha^{\text{IV}}\beta'\beta''\beta''' = 8,$$
$$\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} = \alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} = 4,$$
$$\beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{IV}} = 0.$$

On a donc

$$x = 16 + 32 + 8 = 56.$$

Ainsi *il y a cinquante-six coniques qui passent par un point donné, touchent deux droites données et une conique donnée.*

VIII.

On peut arriver plus rapidement à la formule du n° VI, en remarquant que par la manière même dont chaque condition est introduite, ses paramètres n'entrent dans la formule définitive que sous forme linéaire. Le nombre des solutions est donc représenté par les divers termes du produit

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')(\alpha'' + \beta'')(\alpha''' + \beta''')(\alpha^{\text{IV}} + \beta^{\text{IV}}),$$

dont chacun doit être multiplié par un coefficient qui ne dépend que du nombre des α et des β entrant comme facteurs dans ce terme. Pour abréger, désignons par $(l\alpha m\beta)$ la somme des termes qui renferment l facteurs α et m ou $5 - l$ facteurs β, et par A_m^l le coefficient de cette somme. On aura

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) = \Sigma A_m^l (l\alpha m\beta).$$

Pour trouver A_m^l supposons, par exemple, que les cinq conditions soient de passer par trois points et de toucher deux droites; alors on aura

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 1, \quad \beta = \beta' = \beta'' = 0,$$
$$\alpha''' = \alpha^{\text{IV}} = 0, \quad \beta''' = \beta^{\text{IV}} = 1,$$

et le second membre se réduira au seul terme

$$\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{IV}} = 1.$$

On aura donc

$$N(3\text{ p.}, 2\text{ d.}) = A_2^3,$$

et, en général,

$$N(l\,\text{p.},\, m\,\text{d.}) = A_m^l.$$

Or, N (l p., m d.) est égal, par définition, à la première caractéristique du système [(l—1) p., m d.]; on aura donc

$$N(5\,\text{p.}) = 1,\quad N(4\,\text{p.},\, 1\,\text{d.}) = 2,\quad N(3\,\text{p.},\, 2\,\text{d.}) = 4,$$
$$N(2\,\text{p.},\, 3\,\text{d.}) = 4,\quad N(\text{p.},\, 3\,\text{d.}) = 2,\quad N(5\,\text{d.}) = 1.$$

La formule générale peut donc s'écrire

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) = \Sigma N(l\,\text{p.},\, m\,\text{d.})\,(l\alpha\, m\beta)\ (^*).$$

IX.

La méthode des caractéristiques, que nous venons d'exposer, ne s'applique pas aux seules coniques; on conçoit qu'elle doive aussi convenir aux systèmes de courbes ou de surfaces d'ordre quelconque, et même qu'il existe pour chaque ordre une formule générale analogue à celle qui résume la méthode des coniques (§ VI). Les principes de cette méthode pourront même, il est permis de l'espérer, trouver des applications dans certaines questions d'analyse. Par sa généralité, par sa fécondité, on peut placer la méthode actuelle à côté de cet art analytique dont Viète, son auteur, disait fièrement : *Fastuosum problema problematum ars analytice... jure sibi adrogat, quod est,* NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE. (*In Artem analyticen Isagoge*, chap. VIII, p. 29.) P.

(*) Dans les surfaces du second ordre assujetties à huit conditions, il y a trois caractéristiques qui sont le nombre μ de surfaces qui passent par un point, le nombre ν de celles qui touchent une droite, et le nombre ρ de celles qui touchent un plan. Le nombre des surfaces du second ordre qui satisfont à neuf conditions est représenté par

$$\Sigma N(l\,\text{p.},\, m\,\text{d.},\, n\,\text{P})\,(l\alpha m\beta n\gamma),\quad l + m + n = 9;$$

α, β, γ sont les paramètres d'une condition (communication académique du 26 février 1866).

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE CONIQUES (μ, ν).

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE DE M. CHASLES (*).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

I. *Le lieu des pôles d'une droite est une courbe d'ordre* ν.

Corollaire. — Si la droite est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

Le lieu des centres des coniques est une courbe d'ordre ν.

II. Dans le cas où les coniques du système (μ, ν) passent toutes par deux points, en satisfaisant à deux autres conditions, *le lieu des pôles de la droite qui joint ces points est d'ordre* $\frac{\nu}{2}$.

Corollaire. — Et si les deux points sont à l'infini, *le lieu des centres des coniques du système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $\frac{\nu}{2}$.

III. 1° *Si de deux points Q, Q' on mène des tangentes à chaque conique d'un système* (μ, ν), *les points d'intersection de ces tangentes sont sur une courbe d'ordre* 3ν, *qui a deux points multiples d'ordre* ν, *en Q et Q'*.

2° *Si les coniques du système* (μ, ν) *sont toutes tangentes à la droite QQ', la courbe, lieu des points de*

(*) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 15 février 1864.

rencontre des deux tangentes menées de Q et Q′ à chaque conique, est d'ordre $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$, *et a deux points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$ *en Q et Q′.*

Corollaires. — Si Q et Q′ sont imaginaires, à l'infini, sur un cercle, les points d'intersection des tangentes sont les foyers des coniques. Donc :

1° *Le lieu des foyers des coniques d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν, *qui a deux points multiples d'ordre* ν, *à l'infini, sur un cercle.*

2° *Le lieu des foyers d'un système* (μ, ν) *de paraboles est une courbe d'ordre* $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$ *qui a deux points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$ *imaginaires, à l'infini, sur un cercle.*

IV. *Le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique donnée* U *et à chaque conique d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν.

V. *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* P *à toutes les coniques d'un système est une courbe de l'ordre* $(\mu+\nu)$, *qui a un point multiple d'ordre* μ *en* P.

VI. *Le lieu des points dont chacun a la même polaire dans une conique donnée* U *et dans une conique quelconque du système* (μ, ν) *est une courbe de l'ordre* $(\mu+\nu)$.

Corollaire. — *Le nombre des coniques* (μ, ν) *qui touchent une conique quelconque* U *est* $2(\mu+\nu)$.

VII. *Les tangentes communes à une conique donnée* U *et aux coniques d'un système* (μ, ν) *ont leurs points de contact avec ces dernières sur une courbe d'ordre* $2(\mu+\nu)$, *qui a* $2(\mu+\nu)$ *points de contact avec* U.

Ces $2(\mu+\nu)$ points sont les points de contact des coniques du système et de la conique U.

VIII. *Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point* P *sur les coniques du système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $(2\mu+\nu)$, *qui a un point multiple d'ordre* μ *en* P.

IX. *Le lieu des sommets des coniques du système* (μ, ν) *est une courbe de l'ordre* $(2\mu+3\nu)$.

X. *Le lieu des points de rencontre des coniques du système* (μ, ν) *et de leurs diamètres qui aboutissent à un point fixe est une courbe de l'ordre* $(\mu+2\nu)$.

XI. *Le lieu d'un point dont l'axe harmonique, relatif à une courbe d'ordre* m, *coïncide avec la polaire de ce point relative à une quelconque des coniques d'un système* (μ, ν), *est une courbe de l'ordre* $[\mu(m-1)+\nu]$ (*).

Corollaire. — Cette courbe rencontre la courbe d'ordre m en $m[\mu(m-1)+\nu]$ points, en chacun desquels une conique du système touche la courbe. Donc :

(*) Ce théorème n'est point particulier aux coniques; il s'applique à des courbes d'ordre quelconque, c'est-à-dire que : *Lorsqu'on a un système de courbes d'ordre quelconque* r *déterminées toutes par* $\frac{r(r+3)}{2}-1$ *conditions communes et dont les caractéristiques sont* μ *et* ν, *le lieu d'un point dont l'axe harmonique relatif à une courbe d'ordre* m *coïncide avec l'axe harmonique de ce point, relatif à une courbe quelconque du système, est une courbe de l'ordre* $[\mu(m-1)+\nu]$.

On en conclut que *le nombre des courbes du système, qui touchent une courbe d'ordre* m, *est* $m[\mu(m-1)+\nu]$.

Plusieurs autres propriétés d'un système de coniques s'appliquent pareillement à un système (μ, ν) de courbes d'ordre quelconque; et souvent la fonction des caractéristiques reste la même, comme dans le cas actuel et dans les théorèmes I, V, VIII, XVI, XXII. C'est pour cela que j'ai annoncé que ces recherches, concernant les coniques, seraient un point de départ utile dans la théorie générale des courbes d'ordre supérieur.

Il existe, dans un système de coniques (μ, ν), $m[\mu(m-1)+\nu]$ *coniques tangentes à une courbe donnée d'ordre* m.

COURBES ENVELOPPES.

XII. *Les polaires d'un point enveloppent une courbe de la classe* μ.

XIII. Lorsque toutes les coniques du système (μ, ν) sont tangentes à deux droites et satisfont à deux autres conditions, *la courbe enveloppe des polaires du point de concours des deux droites est de l'ordre* $\frac{\mu}{2}$.

XIV. *Les cordes que deux droites fixes interceptent dans toutes les coniques d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* 3μ, *qui a deux tangentes multiples d'ordre* μ *coïncidant avec les deux droites.*

XV. *Les cordes communes à une conique* U *et à chaque conique d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* 3μ.

XVI. *Les tangentes menées aux coniques* (μ, ν), *par les points où elles coupent une droite donnée* D, *enveloppent une courbe de la classe* ($\mu+\nu$), *qui a la droite* D *pour tangente multiple d'ordre* ν.

Corollaire I. — La courbe de la classe ($\mu+\nu$) admet ($\mu+\nu$) tangentes passant par un point quelconque. Prenant ce point à l'infini, sur une perpendiculaire à la droite D, on en conclut que :

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), *qui coupent à angle droit une droite donnée, est* ($\mu+\nu$).

Corollaire II. — Si la droite D est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

Les asymptotes des coniques d'un système (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν *à l'infini.*

Conséquemment la courbe a ν branches paraboliques.

XVII. *L'enveloppe des droites dont chacune a le même pôle dans une conique donnée* U *et dans une conique quelconque du système* (μ, ν) *est une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$.

Cette courbe a $2(\mu + \nu)$ tangentes communes avec U; et les $2(\mu + \nu)$ points de contact sur U sont les points où $2(\mu + \nu)$ coniques du système touchent la conique U.

XVIII. *Si par les points où une conique* U *rencontre chaque conique d'un système* (μ, ν) *on mène les tangentes de celles-ci, ces tangentes enveloppent une courbe de la classe* $2(\mu + \nu)$ *qui a* $2(\mu + \nu)$ *points de contact avec* U.

Ces $2(\mu + \nu)$ points déterminent $2(\mu + \nu)$ coniques du système tangentes à U en ces points.

XIX. *Les axes des coniques d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XX. *Lorsqu'un axe de chaque conique d'un système* (μ, ν), *qui satisfait à trois autres conditions, passe par un point fixe, la courbe enveloppe des autres axes est de la classe* 2ν.

XXI. *Les diamètres d'un système de coniques* (μ, ν), *qui rencontrent ces courbes sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + 2\nu)$, *qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre* 2ν.

XXII. *Les normales des coniques d'un système* (μ, ν)

aux points de ces courbes situés sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe $(2\mu + \nu)$, *qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre* $(\mu + \nu)$.

XXIII. *Si dans chaque conique d'un système* (μ, ν) *on mène deux diamètres rectangulaires, dont l'un passe par un point fixe, l'autre diamètre enveloppe une courbe de la classe* 2ν, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXIV. *Les diamètres dont les conjugués passent par un point donné enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXV. *Les directrices d'un système de coniques* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(2\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXVI. *Dans un système de coniques* (μ, ν), *dont une directrice passe par un point donné, et qui satisfont à trois conditions communes, les autres directrices enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXVII. Lorsqu'on a une courbe géométrique de la classse n, et une droite D, si de chaque point de la droite on mène les n tangentes de la courbe, et l'axe harmonique de la droite D relatif à ce faisceau de tangentes, cet axe passe toujours par un même point I que nous appellerons le pôle harmonique de la droite D (*).

Cela posé :

Lorsqu'on a un système de coniques (μ, ν) *et une courbe* U' *de la classe* n, *l'enveloppe d'une droite va-*

(*) Voir *Aperçu historique*, p. 623. — *Traité de Géométrie supérieure*, art. 496.

riable, qui a un même pôle harmonique dans la courbe U' *et dans chaque conique du système, est une courbe de la classe* $[\mu + (n - 1)\nu]$.

Corollaire. — Cette courbe a $n[\mu + (n - 1)\nu]$ tangentes communes avec la courbe U', en chacune desquelles une conique du système touche la courbe U'. Conséquemment :

Il existe $n[\mu + (n - 1)\nu]$ *coniques tangentes à une courbe de la classe* n.

Cette formule n'est pas différente au fond de celle du théorème (XI).

PROPRIÉTÉS DIVERSES D'UN SYSTÈME (μ, ν).

XXVIII. 1° *Dans un système de coniques* (μ, ν), *le nombre de ces courbes qui divisent un segment donné, en rapport harmonique, est* μ.

Corollaire I. — *Dans un système de coniques* (μ, ν), *il existe* μ *hyperboles équilatères.*

Corollaire II. — *Un faisceau de coniques étant donné, ainsi qu'un système de coniques* (μ, ν), *il existe dans ce système* μ *coniques homothétiques, respectivement, à* μ *coniques du faisceau.*

2° *Le nombre des coniques par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées, est* ν.

XXIX. 1° *Dans un système de coniques* (μ, ν), *le nombre des coniques semblables à une conique donnée (autre que le cercle et l'hyperbole équilatère), est* 2μ.

2° *Le nombre des coniques dont les tangentes menées par un point fixe donné font entre elles un angle donné, est* 2ν.

Et ce nombre est ν *quand l'angle est droit.*

XXX. 1° *Dans un système de coniques, la condition que les courbes coupent un segment donné en rapport harmonique, équivaut à la condition de passer par un point.*

C'est-à-dire que, si, dans un système, on change la condition de passer par un point, en celle de diviser un segment donné harmoniquement, les caractéristiques du système restent les mêmes.

2° *La condition que, dans les coniques d'un système, deux droites données soient conjuguées par rapport à toutes les coniques d'un système, équivaut à celle que les coniques soient toutes tangentes à une droite.*

C'est-à-dire que, si l'on remplace la condition de toucher une droite, par la condition que deux droites données soient conjuguées relativement à toutes les coniques d'un système, les caractéristiques du système ne changent pas.

XXXI. *La condition d'avoir un foyer en un point donné équivaut à celle de toucher deux droites.*

NOTE DU RÉDACTEUR.

Toutes ces propositions se démontrent en s'appuyant sur les théorèmes I ou II (p. 195). Comme exemple nous allons démontrer la première proposition, savoir :

Le lieu des pôles d'une droite est de l'ordre ν.

Soit D la droite donnée. Cherchons combien il y aura de pôles de cette droite situés sur une droite quelconque L qui rencontre D au point S. Si le pôle de la droite D par rapport à une conique du système se trouve sur la droite L, les droites D et L et les deux tangentes menées par le point S formeront un faisceau harmonique. La question revient donc à celle-ci :

Étant données deux droites SE *et* SF, *combien existe-t-il de coniques telles, que les tangentes menées du point* S *soient conjuguées harmoniques par rapport à* SE *et à* SF?

Soit SX une droite partant du point S. Elle touchera ν coniques, soit SX′ la seconde tangente menée de S à une de ces ν coniques et SU la conjuguée harmonique de SX′ par rapport à SE et SF. A chaque droite SX correspondent ν droites SU et réciproquement à chaque droite SU correspondent ν droites SX. Donc il y aura 2ν droites SU coïncidant avec la droite correspondante SX. Mais comme les tangentes SX′ et SX menées à la même conique correspondent à la même solution, il n'y a donc que ν solutions. La droite L rencontre donc en ν points le lieu des pôles qui est ainsi de l'ordre ν.

C. Q. F. D.

Il importe de remarquer que dans toutes les parties de la méthode, les conditions Z, Z′,... de chaque système doivent avoir entre elles une entière indépendance. Si par exemple les coniques doivent toucher une courbe donnée U, cette courbe ne doit avoir aucune relation avec les autres données de la question : de sorte que si parmi celles-ci se trouve la condition que toutes les coniques passent par un même point, la courbe U est supposée ne pas passer par ce point. De même le lieu des centres ne serait pas du degré ν, si l'une des conditions du système (μ, ν) était que ce centre se trouve sur une courbe donnée.

Lorsqu'il existe entre les conditions données Z, Z′, Z″... certaines dépendances ou des conditions subsidiaires (*),

(*) Par exemple, le nombre des coniques (μ, ν), qui sont tangentes à une conique quelconque U, est $2(\mu+\nu)$: mais si U est une conique du système, ce nombre n'est plus que $2(\mu+\nu-3)$.

les résultats sont différents et ne peuvent pas se conclure immédiatement des formules primitives. Il faut traiter directement ces cas particuliers, mais par la méthode générale. La formule générale, qui comprend la solution de toutes les questions, s'applique aussi à tous les cas particuliers, puisqu'il suffit de mettre dans cette formule les paramètres α, β, qui conviennent à ces cas particuliers. P.

SUR LA TRANSFORMATION QUADRIQUE (*);

PAR M. T.-A. HIRST.

M. Transon, dans le numéro de février dernier des *Nouvelles Annales*, a très-justement observé que la méthode de l'inversion quadrique et celle de la projection gauche sont essentiellement distinctes. Cependant, les deux méthodes sont des cas particuliers de la transformation qui a été d'abord étudiée analytiquement par Magnus, dans le VIIIe volume du *Journal de Crelle*, et géométriquement, par moi-même, dans un Mémoire inédit communiqué en septembre dernier à l'*Association Britannique*. D'abord Magnus a supposé à tort que sa méthode de transformation était la plus générale de celles dans lesquelles à un point de l'un des systèmes correspond un seul point de l'autre. Les recherches subséquentes de Cremona, de Jonquières, Clebsch et Cayley ont montré que cela n'a pas lieu : la transformation de Magnus est seulement la plus générale de celles mentionnées plus haut, pour lesquelles *à chaque ligne droite cor-*

(*) *On the quadric transformation.*

respond une conique. Toutes les coniques qui, dans la méthode de la *transformation quadrique*, correspondent aux lignes droites de l'un ou de l'autre système, passent nécessairement par trois points nommés par Magnus *points principaux* de la transformation. Je me propose, après avoir donné la plus simple définition de la transformation quadrique, de montrer comment, en plaçant d'une manière convenable les points principaux, elle devient identique, d'une part, avec la méthode de la projection inverse proposée et développée, il y a quarante-quatre ans, par Steiner, dans son célèbre ouvrage *Systematische Entwickelung, etc.*, et récemment reproduite par M. Transon qui, sans aucun doute, y était conduit par ses propres recherches; et, d'autre part, avec la méthode de l'inversion quadrique qui, comme je l'ai observé ailleurs, a été suggérée par Bellavitis.

1. Pour établir une correspondance entre les divers points d'un plan, prenons deux couples de points B, B′ et C, C′, et considérons-les comme les sommets de deux couples de faisceaux homographiques [B], [B′] et [C], [C′]. Alors à chaque point P, considéré comme l'intersection de deux rayons BP, CP des deux faisceaux [B], [C] correspondra un point unique déterminé par l'intersection des deux rayons correspondants B′P′, C′P′ des faisceaux [B′], [C′], respectivement homographiques à [B] et [C].

2. Si à la ligne BC, considérée comme rayon commun des faisceaux [B] et [C], correspond dans les faisceaux [B′] et [C′] la ligne B′C′, la correspondance entre les points P et P′ sera simplement l'homographique, telle que l'a définie M. Chasles dans la *Géométrie supérieure.* Mais si à BC correspondent les rayons B′A′ et C′A′ dans les faisceaux [B′] et [C′], et que sembla-

blement à $B'C'$ correspondent BA et CA dans [B] et [C], le mode de correspondance entre les points P et P' sera identique à celui considéré par Magnus. J'appellerai A, A'; B, B'; C, C' les trois couples de points *homologues* principaux.

3. Ces points sont exceptionnels en ce que chacun a un nombre infini de points correspondants. Au point A, par exemple, correspond un point quelconque de $B'C'$, et au point A' un point quelconque de BC. En outre, à chaque point de BA correspond, comme on peut le voir facilement, le point C', et ainsi de suite. Bref, *à chaque point situé sur une ligne principale correspond l'homologue du point principal opposé, et* vice versâ.

4. Réciproquement, *à une droite de chaque système correspond, en général, une conique qui passe par les points principaux de l'autre système.* Car nous pouvons regarder toute ligne droite L comme le lieu de l'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques [B] et [C], qui ont un couple de rayons correspondants qui coïncident avec BC. Les faisceaux correspondants [B'] et [C'] seront alors aussi homographiques, et $B'A'$, $C'A'$ seront un couple de rayons correspondants, qui, par conséquent, engendrent une conique [S'], passant par les points A', B', C'. Semblablement, à chaque droite L' correspondra une conique [S] passant par A, B, C, et réciproquement à chaque conique passant par les trois points principaux de l'un des systèmes correspondra une ligne droite dans l'autre système.

5. Plus généralement, si n et n' désignent l'ordre de deux courbes correspondantes, a et a', b et b', c et c', respectivement, les nombres de fois qu'elles passent par A et A', B et B', C et C', on pourra facilement établir

les relations symétriques suivantes.

$$a' = n - b - c, \qquad a = n' - b' - c',$$
$$b' = n - c - a, \qquad b = n' - c' - a',$$
$$c' = n - a - b, \qquad c = n' - a' - b',$$
$$n' = 2n - (a + b + c); \qquad n = 2n' - (a' + b' + c').$$

6. En général, il y a seulement quatre points du plan tels, que chacun d'eux coïncide avec son correspondant. On peut démontrer comme il suit l'existence de ces points doubles. Je prends un point P comme centre d'un faisceau de rayons [P] : ce dernier sera manifestement homographique au faisceau des coniques correspondantes [A', B', C', P'] (4), et le lieu des intersections des éléments correspondants des deux faisceaux sera une cubique [C] passant par A', B', C', P', P, qui peut être définie *le lieu des points du second système qui sont situés, avec leurs correspondants, sur des lignes qui convergent au point* P. A tout point de convergence P_1 sera de même associée une autre cubique [C_1] qui coupera [C] aux trois points principaux A', B', C' et aux deux points du second système situés, avec leurs correspondants, sur la ligne PP_1. Les quatre intersections qui restent seront les quatre points doubles demandés, autrement chacun serait situé avec son correspondant sur une ligne qui passe par P aussi bien que par P_1, ce qui est impossible.

7. Il doit être observé que les trois couples de points homologues principaux étant donnés, la transformation est parfaitement déterminée dès que l'on connaît un seul couple de points correspondants. Je signalerai brièvement quelques cas spéciaux.

Chacun des points principaux A, A' *est situé sur la ligne principale opposée à son homologue* A', A : alors,

puisque chacun des points A et A′ coïncide avec un de ses points correspondants (3), il est manifeste que s'il en est de même d'un autre point de AA′ (et la supposition est permise), chaque point de AA′ coïncidera avec son point correspondant. De plus, chacune des lignes BB′ et CC′, regardée comme une des lignes de l'un ou de l'autre système, coïncidera avec la ligne correspondante, en sorte que leur point d'intersection D coïncidera avec son correspondant. En fait, la cubique (C), lieu de tous les points du second système situés, avec leurs correspondants, sur des droites qui convergent vers un point P (6), se décompose dans la ligne droite AA′ et la conique (B′C′PP′). De même, la cubique (C_1), associée à un autre point P_1, se compose de la droite AA_1 et de la conique ($B'C'P_1P'_1$), et, ces coniques se coupant en B′, C′ et en un point de PP_1, elles passent par D. Ce cas de la transformation quadrique coïncide évidemment avec la projection gauche de Steiner, pourvu que, ainsi que M. Transon l'a observé, on fasse coïncider le plan de projection avec le plan de la figure primitive.

8. D'autres cas spéciaux dignes de remarque naissent de l'hypothèse de la *coïncidence des deux triangles principaux;* cette coïncidence peut arriver de plusieurs manières.

1° *En chaque sommet de deux triangles principaux deux points homologues principaux coïncident.*

C'est-à-dire que A coïncide avec A′, B avec B′, et C avec C′. Il est manifeste que les quatre points doubles D_1, D_2, D_3, D_4 forment alors un quadrilatère dont les côtés opposés se rencontrent aux sommets du triangle principal; car ces points doubles sont sur les rayons doubles de chacun des trois couples de faisceaux concentriques et homographiques [A], [A′]; [B], [B′]; [C], [C′]. De

plus, on voit facilement que les polaires d'un point P relativement aux diverses coniques du faisceau [D_1, D_2, D_3, D_4] passent par le point correspondant P'. Ce cas spécial de la transformation quadrique est connu depuis longtemps. Salmon, Beltrami, Bellavitis, le professeur Newton (de l'Amérique) et d'autres l'ont étudié.

2° *En un seul sommet du triangle principal coïncident deux points homologues principaux.*

Que A coïncide avec A', B avec C' et C avec B', (B'C) et (BC') sont maintenant des points doubles, et AB, AC sont les rayons doubles des faisceaux homographiques [A], [A']; si nous supposons qu'un autre rayon du faisceau [A] coïncide avec son correspondant dans [A'], tous les faisceaux correspondants coïncident, et nous aurons le cas de l'inversion quadrique. Sur chaque rayon mené par le point (AA'), les points correspondants P, P' formeront une involution, et les points doubles de ces diverses involutions seront sur une conique qui touche les droites AB, AC en B et C. C'est la conique fondamentale F de l'inversion quadrique, et P, P' sont relativement à elle des points conjugués. Les cubiques (C) et (C_1), associées à deux points P, P_1, se décomposent dans la conique F et les lignes droites PA, P_1A. Les points de la conique F sont donc les seuls points doubles.

3° *En aucun sommet du triangle principal ne coïncident deux points homologues principaux.*

Cette méthode, où, par exemple, A et C', B et A', C et B' coïncident, n'a pas, que je sache, été étudiée jusqu'à présent. Je n'ai point l'intention de l'étudier ici; je remarquerai simplement que des quatre points doubles trois coïncident avec les sommets du triangle principal.

SUR LA CYCLIDE;

PAR M. A. GODART,

On nomme *cyclide* la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.

La cyclide a quatre nappes, de même qu'il y a quatre séries de cercles tangents à trois cercles fixes. Dans ce qui va suivre, nous considérerons une nappe isolée, que nous pouvons définir de la manière suivante : Nous avons dans un plan deux cercles fixes (o) et (o'), et nous imaginons tous les cercles tels que (a) tangents extérieurement à (o') et intérieurement à (o). Les sphères qui ont les cercles (a) pour grands cercles enveloppent une nappe de la cyclide.

Si nous considérons deux sphères (a) suffisamment rapprochées pour qu'elles se coupent, nous voyons que leur cercle commun prendra une position limite quand l'une des sphères viendra se confondre avec l'autre; cette position limite du cercle sera précisément la ligne de contact de la sphère (a) avec la cyclide.

Les plans de tous ces cercles de contact sont évidemment perpendiculaires au plan des cercles (o) et (o'); et de plus ils passent tous par une même droite. Nous savons en effet que si l'on mène un cercle tangent à deux cercles fixes, la droite qui passe par les points de contact contient toujours un des centres de similitude des cercles fixes. Ainsi, le cercle (a) touche les deux circonférences (o) et (o') aux points k et l, et la ligne kl va passer par le centre de similitude inverse C_i de (o) et (o'). Et par conséquent la sphère (a) touche la cyclide suivant un

cercle projeté sur kl, dont le plan contient la ligne menée par C_i perpendiculairement au plan de (o) et (o').

M. Dupin, dans ses *Applications de Géométrie*, p. 200, étudie la surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires. Il démontre que cette surface est nécessairement l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes. Il lui donne le nom de *cyclide* et en expose les principales propriétés.

M. Mannheim, au moyen de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, ramène l'étude de la cyclide à l'étude du tore. Il démontre avec beaucoup d'élégance les propriétés déjà connues de cette surface et en indique plusieurs tout à fait nouvelles. Ainsi, M. Mannheim fait voir que toute sphère bitangente rencontre la cyclide suivant deux circonférences. D'où il conclut que tout plan bitangent contient également deux cercles de la surface (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 67).

Nous nous proposons de démontrer que les plans bitangents à la cyclide enveloppent un cône, que ce cône est du second degré, et qu'il touche la surface suivant une ligne sphérique.

Commençons par chercher l'intersection de la cyclide avec une sphère bitangente qui ait son centre dans le plan des cercles (o) et (o'). Nous savons, d'après le théorème de M. Mannheim, que cette intersection se compose de deux cercles. Nous allons donner de ce fait une nouvelle démonstration qui nous indiquera la position du plan bitangent.

Le plan qui contient les cercles (o) et (o') et aussi le centre de la sphère bitangente considérée coupe cette dernière suivant un cercle qui touche à la fois (o) et (o'). Les deux points de contact seront sur une droite qui passe par le centre de similitude C_d.

Et réciproquement, si par C_d nous menons une droite quelconque C_dS (*), elle coupera les cercles (o) et (o') en quatre points α, β, α', β', et l'on pourra toujours construire une circonférence qui touche (o) en α et (o') en α'. De même on pourra toujours construire une circonférence tangente en β au cercle (o') et en β' au cercle (o).

Si l'on joint o et α, o' et α', les deux lignes ainsi obtenues se rencontrent en γ' qui est le centre du cercle qui touche (o) en α et (o') en α'.

Si l'on joint de même o à β' et o' à β, on obtiendra un second cercle (γ) tangent à (o') en β et à (o) en β'.

Considérons en particulier la sphère qui a (γ') pour grand cercle et qui est bitangente à la cyclide aux points α et α'. La sphère (γ') coupe l'une des sphères génératrices (a) suivant un cercle projeté sur hf. Mais la sphère génératrice (a) touche la cyclide suivant un cercle projeté sur kl, de sorte que le point μ, intersection de hf et de kl, est la projection de deux points communs à la cyclide et à la sphère (γ').

Quand la sphère (a) engendre la cyclide, le point μ engendre une courbe dont nous allons déterminer la nature, et qui est la projection de l'intersection de la sphère (γ') avec la cyclide.

hf est la tangente en μ au lieu décrit par le point μ. Car deux lignes infiniment voisines telles que hf se rencontrent sur la corde commune aux deux circonférences (a) correspondantes. Or, cette corde commune qui passe constamment par C_i a précisément pour limite kl.

Si nous menons la tangente en l à la circonférence (o), elle coupera hf en I. Ce point est sur la tangente menée

(*) Le point S est situé sur l'axe radical de (o) et de (o').

en α à la circonférence (o). Le point I est en effet le point de concours des trois cordes communes aux circonférences (a), (o) et (γ').

A un point μ correspond donc sur le cercle (o) un point l, ces deux points étant situés sur une droite qui passe toujours par le point fixe C_i pendant que les tangentes à leurs courbes respectives se rencontrent en I sur la droite fixe $I\alpha$.

Nous concluons de là que lorsque la sphère (a) engendre la cyclide, le point μ décrit une courbe homologique de (o), C_i étant le centre et αI l'axe d'homologie.

Or, la courbe homologique d'un cercle est une conique (*). Donc le lieu des points μ est une conique.

hf se confond en α avec la tangente au cercle (o) et en α' avec la tangente au cercle (o'). Ainsi la conique décrite par μ est tangente en α et α' au cercle (γ').

Le cylindre droit qui a pour base la courbe μ rencontre la sphère (γ') suivant l'intersection cherchée. Le cylindre et la sphère ont un double contact en α et α'. Il résulte d'un théorème de Monge (**) que ces deux surfaces ont en commun deux courbes planes et par conséquent deux cercles qui se coupent en α et α'.

La sphère (γ) rencontre de même la cyclide suivant deux autres cercles qui se coupent en β et β'. J'ajoute que ces quatre cercles sont deux à deux dans le même plan.

En effet, le plan qui, passant par α et α', contient l'un

(*) Poncelet, *Traité des Propriétés projectives des figures*, t. I.

(**) *Deux surfaces du second degré qui ont un double contact se rencontrent suivant deux courbes planes :* théorème énoncé par Monge, démontré par M. Chasles dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, t. III, p. 335. *Voir*, dans le si remarquable *Supplément au Traité des Propriétés projectives*, l'élégante démonstration que le général Poncelet donne de ce théorème.

des cercles communs à la sphère (γ') et à la cyclide, rencontre en deux points le cercle suivant lequel se coupent (γ) et (γ'). Ces deux points sont évidemment communs à la sphère (γ) et à la cyclide. Ils appartiennent à l'un des deux cercles de (γ). Et comme ce cercle passe déjà par β et β', il se trouve bien placé dans le plan précédemment considéré. Ce plan est bitangent à la surface aux deux points communs aux cercles qu'il renferme (*).

Mais $\alpha\beta'$ passe par le point fixe C_d, d'où nous concluons que *les plans bitangents enveloppent un cône.*

Nous allons voir de plus que ce cône est du second ordre.

Nous savons que lorsque deux cercles sont tangents à deux autres, leur corde commune passe par un centre de similitude des deux derniers. Ainsi la corde commune MM' à (γ) et (γ') passe par C_d, centre de similitude directe de (o) et (o').

Nous avons déjà précédemment remarqué que les deux points de contact du plan bitangent sont sur le cercle commun aux sphères (γ) et (γ'), qui se projette sur MM'. Si maintenant nous considérons le cône enveloppe, nous voyons que, $C_d\alpha$ étant la trace d'un plan tangent à ce cône, C_dM sera la projection de la génératrice de contact.

$C_d\alpha$ et C_dM sont, comme nous allons le démontrer, parallèles à un système de diamètres conjugués d'une conique qui aurait pour axe $C_d\sigma$ (**). Or c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le cône soit du second degré.

Remarquons que $C_d\alpha$ rencontre $\gamma\gamma'$ en un point S précisément situé sur la corde commune $S\sigma$ à (o) et (o').

(*) La cyclide offre un cas particulier des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre étudiées par M. Moutard.

(**) Le point σ est sur l'axe radical de (o) et de (o').

En effet, les deux cercles (o) et (o') étant tangents à la fois à (γ) et à (γ'), leur corde commune contient l'un des centres de similitude de (γ) et (γ'). D'ailleurs, la droite $\alpha\beta'$ qui joint les points de contact passe également par ce centre de similitude, qui est encore nécessairement situé sur la ligne des centres $\gamma\gamma'$. Ainsi les trois lignes $\gamma\gamma'$, $C_d\alpha$, σS se coupent bien au même point. Ceci posé, désignons par ε et ε' les angles que font avec oo', les deux lignes $C_d\alpha$ et C_dM, et observons que MM', corde commune à (γ) et (γ'), est perpendiculaire sur la ligne des centres $\gamma\gamma'$.

Le triangle rectangle $SC_d\sigma$ donne

$$\tang\varepsilon = \frac{S\sigma}{C_d\sigma}.$$

Le triangle rectangle $\omega S\sigma$ donne

$$\tang\varepsilon' = -\frac{S\sigma}{\omega\sigma},$$

d'où

$$\tang\varepsilon \times \tang\varepsilon' = -\frac{\omega\sigma}{C_d\sigma} = \text{const.},$$

ce qui caractérise les deux directions de deux diamètres conjugués d'une conique.

On peut donc circonscrire à la cyclide un cône bitangent du second degré (*).

Nous déterminerons la ligne de contact en remarquant que les points tels que M sont disposés sur une circonférence décrite de ω (**) comme centre. En effet,

$$C_dM \times C_dM' = C_d\alpha \times C_d\alpha'.$$

(*) Dans l'anallagmatique générale du quatrième ordre, les plans doublement tangents se répartissent suivant les plans tangents à cinq cônes du second degré (*voir* dans les *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. III, p. 206, la note de M. Moutard).

(**) Le point ω est au milieu de la ligne oo'.

Ce dernier produit est constant, parce que C_d est le centre de similitude de (o) et (o'). De plus, MM′ corde commune à (γ) et (γ') est perpendiculaire en son milieu D à la ligne des centres $\gamma\gamma'$. Le point D décrit donc une circonférence dont ωC_d est le diamètre; et il est ainsi prouvé que M et M′ sont sur une même circonférence dont ω est le centre. La sphère qui a pour grand cercle la circonférence décrite par M passe évidemment par l'intersection des sphères (γ) et (γ'). Elle contient donc les points de contact du cône avec la cyclide.

Ainsi *la ligne de contact du cône est la ligne commune à la sphère* (ω) *et à la cyclide.*

Au surplus, il serait facile de construire par points la projection de cette courbe sur le plan oo'. Décrivons de S comme centre une circonférence qui passe par M. Elle sera orthogonale à (o) et à (o'), parce que S est le centre de similitude de (γ) et (γ'). Par conséquent, les deux points d'intersection p et q sont sur une droite qui passe par le centre de similitude directe C_i de (o) et (o'). La ligne pq est, d'après une remarque faite au commencement de cet article, la projection d'un cercle de la cyclide. Ce cercle coupe le cercle commun aux sphères (γ) et (γ'), projeté sur MM′; car le cercle pq et le cercle MM′ sont tous deux sur la sphère S. Or le cercle MM′ contient, comme nous le savons, les points de contact relatifs au plan bitangent. Donc ces points se projettent sur m où se coupent les deux droites pq et MM′.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 656

(voir 2e série, tome III, page 274);

Démontrer géométriquement que la division de la circonférence en sept parties égales se ramène à la trisection de l'angle dont la tangente est égale à $3\sqrt{3}$.

(MATTHEW COLLINS.)

On sait que l'inscription de l'heptagone se ramène à la résolution de deux équations, l'une du deuxième degré, l'autre du troisième. Or, la résolution d'une équation du troisième degré (qui a ses trois racines réelles) peut toujours se ramener à la trisection d'un angle. Ce sont là sans doute les considérations qui ont conduit M. M. Collins à la construction suivante, qu'il nous a communiquée, et dont la vérification n'offre aucune difficulté.

Soient AOA′ et BOB′ deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre; prenez du côté du point A′, $OO' = \frac{1}{6} OA'$; soit AE le sixième de la circonférence; menez EC parallèle à AA′ et qui rencontre BB′ en b; du point O′ comme centre décrivez l'arc bFb' (le point b' est sur BB′). Soit bD le tiers de cet arc. En prolongeant jusqu'à la rencontre du premier cercle en Z une perpendiculaire abaissée du point D sur AA′, l'arc AZ sera le septième de la circonférence proposée.

P.

Question 742

(voir 2e série, t. IV, p. 429);

PAR M. L. LACAUCHIE.

Le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle. (J. GRIFFITHS.)

Soit ABC le triangle; α, β, γ les milieux de ses côtés; les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ toucheront les paraboles conjuguées an triangle ABC. Le lieu des foyers est donc le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire le cercle des neuf points du triangle proposé.

Note. — Autres démonstrations par MM. Bauquenne, F. Richard, Elliot, Hatté, Niébylowski, Muzeau, Delaunay et de Viaris, Marmier, Viant, Rondot.

Question 743

(voir 2e série, t. IV, p. 429);

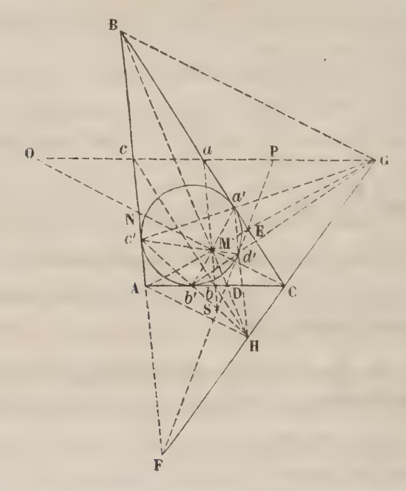
PAR M. L. LACAUCHIE.

Soient a', b', c' les points auxquels les côtés d'un triangle ABC *sont touchés par le cercle inscrit; par chacun des sommets* A, B, C *on mène une droite parallèle à l'axe d'homologie des triangles* ABC, $a'b'c'$, *et on désigne par x, y, z les points de leur intersection avec les côtés* BC, CA, AB, *et par p le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle inscrit* $(a'b'c')$ *sur l'axe d'homologie des triangles* ABC, xyz : *démontrer que la circonférence des neuf points du triangle* ABC *touche la circonférence inscrite* $(a'b'c')$ *au point p.* (J. GRIFFITHS.)

Il est aisé de ramener cette construction à celle qui

fait l'objet de la Note insérée par M. Gerono, p. 221 (1865).

Les droites AH, BG, CM ne sont autres que les droites Ax, By, Cz de l'énoncé précédent. En effet, soient α,



β, γ les trois points qui déterminent l'axe d'homologie des triangles ABC et $a'b'c'$; on sait que α est le conjugué harmonique de a' par rapport à C et B, donc les droites $\gamma\alpha$, $\gamma a'$, γC, γB forment un faisceau harmonique. Or M est le milieu de CN, donc CM est parallèle à $\alpha\beta\gamma$. Il en est de même des droites AH et BG.

Le point N n'est autre chose que le point z; or H, G, M sont respectivement les milieux des droites Ax, By, Cz, donc xy coupe AB au point F par où passe la droite HG; de même yz coupe BC en E, et zx coupe CA en D, donc FP est l'axe d'homologie des triangles ABC et xyz. La Note démontre que cette droite est la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points; la proposition est donc démontrée.

Une construction analogue s'applique aux cercles exinscrits.

Question 746

(voir 2e série, t. III, p. 430);

PAR M. MERCE BUSCO.

Démontrer la relation

$$m = \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\sin\frac{5\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}} \right\}^2,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair.

(E. CATALAN.)

En posant $\sin a = z$, on a (*voir*, par exemple, la *Trigonométrie* de M. Serret), pour des valeurs paires de l'entier positif m,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos ma &= 1 - \frac{m.m}{1.2} z^2 + \ldots \\ &\quad \pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots m\ldots 2}{1.2\ldots m} z^m, \\ \frac{\sin ma}{m\sin a\cos a} &= 1 - \frac{(m+2)(m-2)}{1.2} z^2 + \ldots \\ &\quad \pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots(m+2)(m-2)\ldots 2}{1.2\ldots m} z^{m-2}; \end{aligned}\right.$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos ma}{\cos a} &= 1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots \\ &\quad \pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{1.2\ldots(m-1)} z^{m-1}, \\ \frac{\sin ma}{\sin a} &= 1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2.3} z^2 + \ldots \\ &\quad \pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{1.2.3\ldots m} z^{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Le rapport des coefficients de z^m et de z^{m-2} dans les deux polynômes (1), c'est-à-dire m, représente le rapport renversé des produits respectifs des racines de ces polynômes; et comme ces racines sont respectivement

$$\pm \sin\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \sin\frac{3\pi}{2m}, \ldots,$$

$$\pm \sin\frac{2\pi}{2m}, \quad \pm \sin\frac{4\pi}{2m}, \ldots,$$

on en conclut la relation de M. Catalan qu'on obtient encore, dans le cas de m impair, au moyen des formules (2).

En ayant égard aux relations ordinaires entre les coefficients et les racines d'une équation, on peut trouver d'autres formules, par exemple :

$$\frac{m^2}{2} = \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{3\pi}{2m}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{(m-1)\pi}{2m}},$$

pour m pair;

$$\frac{m^2-1}{2} = \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{3\pi}{2m}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{(m-2)\pi}{2m}},$$

pour m impair.

Note. — M. de Virieu a démontré la même formule.

Question 750

(voir page 48);

PAR M. MARQUES BRAGA,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Si l'on fait la projection gauche d'une figure plane sur un tableau plan et si ensuite on fait tourner l'un

des deux plans autour de leur intersection commune, les deux figures demeureront toujours les projections gauches l'une de l'autre. (ABEL TRANSON.)

Il suffit de démontrer le théorème pour une droite et une conique, projections gauches l'une de l'autre. La conique donnée passe par les points A', B', l, γ et par l'intersection de la droite donnée avec L. (Nous adoptons les notations de M. Transon; *voir* t. IV, p. 385.) Or, si on fait la projection gauche après avoir fait tourner le tableau d'un certain angle, aucun de ces cinq points ne changera; la conique ne changera donc pas.

Autre démonstration par M. Viant. — O étant un point du plan primitif et α, β les points où OA et OB rencontrent la droite L, le point O' se trouve à la rencontre de $\alpha A'$ avec $\beta B'$. Or quand le plan du tableau tourne autour de L, ces droites ont chacune deux points fixes dans le plan mobile, savoir α et A', β et B'. Le point O' reste donc toujours la projection gauche du point O.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XI.

SPEZI. — *Memorie... Notice sur un manuscrit grec du Vatican.* In-8 de 16 pages; 1865.

Ce manuscrit, déjà signalé dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* par M. Parthey, est un in-folio du XIII[e] siècle et d'une très-belle écriture. Après avoir, dans une introduction de cinq pages, montré combien il est beau et louable de répandre les monuments de l'antique savoir, ce qui assurément ne sera contesté par personne, M. Spezi donne le catalogue des ouvrages, au nombre de quarante-neuf, contenus dans le manuscrit 191. On y trouve les noms de Euclide, Marin, Ptolémée,

Aristarque, Eutocius, Proclus, Aratus, Hipparque, Eratosthène, Aristoxène, Diophante (les six premiers livres), etc. Quelques explications seraient à désirer sur le contenu de certains opuscules. Qu'est-ce qu'un Valens d'Antioche, qui a fait une Anthologie astronomique en huit livres (Οὐαλεντος Ἀντιοχέως ανθολογιῶν, p. 89 à 104)? Plusieurs Traités paraissent n'avoir jamais été imprimés et appartenir à des auteurs dont on ne connaissait que le nom. Que renferment-ils d'intéressant?

XII.

TORTOLINI (BARNABA). — *Elenco... Liste des Travaux scientifiques de* Barnaba Tortolini, Professeur de Calcul supérieur à l'Université de Rome, l'un des quarante de la Société Italienne. In-8 de 10 pages.

Le mérite scientifique de M. Tortolini est connu de tous les géomètres. La présente liste constate la publication d'un ouvrage séparé, les *Éléments de Calcul infinitésimal*, et de quatre-vingt-dix-sept Notes ou Mémoires insérés dans les recueils suivants: *Journal académique de Rome*, *Recueil de lettres et autres écrits relatifs à la Physique et aux Mathématiques*, *Journal de Crelle*, *Actes de l'Académie pontificale*, *Mémoires de la Société Italienne*, *Annales des Sciences mathématiques et physiques*, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. M. Tortolini est né à Rome le 19 novembre 1808.

XIII.

LAMARLE (ERNEST), Associé de l'Académie royale de Belgique. — *Note sur les héliçoïdes gauches susceptibles de s'appliquer et de se développer les uns sur les autres; détermination géométrique de la série des surfaces de révolution sur lesquelles peut s'appliquer un héliçoïde*. In-8 de 16 pages. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XIX, n° 4.)

XIV.

Catalan (Eugène), Associé de l'Académie royale de Belgique, Professeur à l'Université de Liége. — *Note sur l'intégration d'un système d'équations homogènes.* In-8 de 8 pages. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* t. XXI, n° 1.)

Soient les équations

$$(1)\quad \frac{dx}{ax+by+cz} = \frac{dy}{a'x+b'y+c'z} = \frac{dz}{a''x+b''y+c''z};$$

chacun de ces rapports est égal à

$$(2)\quad \frac{\lambda dx + \lambda' dy + \lambda'' dz}{(a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'')x + (b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'')y + (c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'')z}.$$

Posons

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda''} &= \frac{\lambda'}{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''} \\ &= \frac{\lambda''}{c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda''} = \frac{1}{s}; \end{aligned} \right.$$

on tire des trois équations homogènes (3) l'équation

$$\begin{vmatrix} a-s & a' & a'' \\ b & b'-s & b'' \\ c & c' & c''-s \end{vmatrix} = 0,$$

qui étant du troisième degré donnera trois valeurs s_1, s_2, s_3 pour s, et il en résultera des valeurs correspondantes λ_1, λ_2, λ_3, λ'_1, etc., pour λ, λ', λ''. Chacun des rapports (1) étant égal au rapport (2), ou

$$\frac{1}{s}\, dl(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z),$$

quelle que soit la valeur de s, on aura donc

$$\frac{1}{s_1} d.l(\lambda_1 x + \lambda'_1 y + \lambda''_1 z) = \frac{1}{s_2} d.l(\lambda_2 x + \lambda'_2 y + \lambda''_2 z)$$
$$= \frac{1}{s_3} d.l(\lambda_3 x + \lambda'_3 y + \lambda''_3 z),$$

équations faciles à intégrer.

Cet élégant procédé dispensera de recourir à la méthode générale qui consiste, comme on sait, à éliminer toutes les variables moins deux à l'aide d'un certain nombre de différentiations.

XV.

Van der Mensbrugghe (G.). — *Sur les propriétés de deux droites faisant avec un axe fixe des angles complémentaires.* In-8 de 14 pages. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*)

L'auteur appelle *réciproques* deux rayons vecteurs qui font avec l'axe des angles complémentaires, mauvaise dénomination, le mot *réciproque* ayant déjà un sens universellement admis. En prenant sur le rayon vecteur d'une courbe une longueur qui soit quelque fonction simple du rayon vecteur réciproque, on trouve une autre courbe qui a certaines relations avec la première. On arrive ainsi à quelques générations de courbes et à des énoncés nouveaux de théorèmes connus. Ainsi le théorème III de la page 13 revient à dire que *la somme des carrés de deux diamètres perpendiculaires dans l'ellipse est égale à la somme des carrés des axes.* Car la réciproque d'un diamètre n'est autre que la droite symétrique, par rapport à un axe, du diamètre perpendiculaire au premier.

XVI.

Beynac, Professeur de Mathématiques. — *Traité d'Arithmétique.* In-8 de XVI-256 pages; 1865.

« Les vérités mathématiques, dit l'auteur, se soutiennent et se succèdent dans un ordre logique *que l'analyse fait découvrir.* Comme l'étude des Mathématiques ne peut être utilement

abordée que par des esprits droits et sérieux, *la méthode analytique convient mieux que toute autre*. Cette méthode a le double privilége de ne pas nous retenir dans des limites étroites et de faciliter le développement des aptitudes scientifiques de ceux qui l'appliquent. Pour ces motifs, nous avons cherché à établir, dans la première étude des sciences, une marche ayant pour objet d'initier aux ressources de l'*analyse*, méthode dont le caractère est de donner aux principes le degré de généralité qui leur est propre. Dès lors les règles du calcul n'ont plus rien d'arbitraire. » Comme M. Beynac ne nous dit pas ce qu'il entend par *analyse* (le mot est susceptible de trois ou quatre sens différents), il est bien difficile de juger si la méthode dont il parle mérite tant d'éloges. En fait, les avantages signalés appartiennent à toute bonne méthode quelle qu'elle soit. Mais nous ne voulons pas chicaner l'auteur sur une chose aussi peu importante qu'une préface. L'important est que l'ouvrage soit clair, méthodique, complet. Or il possède toutes ces qualités. Il se distingue en outre par un grand nombre d'exercices empruntés à l'arithmologie.

XVII.

FORTI (ANGELO), professeur d'Algèbre et de Mécanique au lycée royal de Pise. — *Lezioni elementari di Meccanica, ad uso dei RR. Licei* (*Leçons élémentaires de Mécanique*). Volume in-12 de 337 pages; 1865.

Cet ouvrage est conçu sur un plan qui nous paraît excellent. L'auteur a su se tenir également loin de deux excès que nous avons vus régner tour à tour dans la direction des études mécaniques. Il ne prétend nullement réduire cette science à une abstraction pure, où les formules remplaceraient les expériences. Partout, au contraire, il invoque l'observation, soit pour préparer les développements théoriques, soit pour leur servir de vérification et en rehausser l'intérêt par des exemples pratiques. Mais il profite de l'occasion pour donner aux élèves un recueil d'excellents exercices de calcul algébrique, qui ne laissent pas pour cela d'éclaircir les théories de la science des

forces. Cela vaut infiniment mieux, pour l'enseignement élémentaire, que les recueils de formules abstraites ou de problèmes en l'air.

Le seul reproche que nous ferons à l'auteur, c'est de n'avoir peut-être pas assez nettement séparé l'étude du mouvement en lui-même, ou la Cinématique, de l'étude du mouvement rapporté à ses causes, ou de la Dynamique. Cette séparation, aujourd'hui universellement adoptée en France, peut être considérée comme une des causes les plus importantes des progrès récents de l'enseignement de la Mécanique. Du reste, il suffirait, pour parer à l'inconvénient que nous signalons, de faire quelques transpositions dans l'ordre des matières, ce qui ne peut offrir aucune difficulté à un professeur intelligent.

Nous signalerons particulièrement à l'attention des lecteurs les démonstrations de l'expression du travail des machines et de l'isochronisme du pendule, où l'auteur a suppléé d'une manière simple aux connaissances du calcul infinitésimal qui manquent aux élèves. J. H.

CORRESPONDANCE.

M. Picart, à Paris. — « Vous me demandez une rectification au théorème sur les lignes géodésiques des surfaces ganches, que j'ai énoncé dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, et que vous avez reproduit dans le numéro de décembre des *Nouvelles Annales*.

» Je m'empresse de vous fournir quelques explications sur ce sujet.

» Ayant appris de M. O. Bonnet qu'il venait de démontrer que *lorsque deux surfaces gauches sont applicables l'une sur l'autre, les génératrices rectilignes de ces surfaces sont nécessairement des lignes homologues*, je cherchai de mon côté une démonstration de ce théo-

rème remarquable qui comblait une lacune dans la théorie de la déformation des surfaces gauches. Voici la méthode que je suivis. Comme, dans la déformation d'une surface quelconque, la courbure géodésique des lignes tracées sur cette surface et la courbure de la surface elle-même en chacun de ses points ne sont pas altérées, je me proposai de voir s'il existe sur une surface gauche des systèmes de lignes géodésiques le long desquelles la courbure de la surface suive la même loi que le long des génératrices rectilignes. J'arrivai à une équation qui me donnait, en chaque point, deux directions de lignes géodésiques satisfaisant à cette condition. Partant alors de ce fait, que sur les surfaces gauches du deuxième degré il y a bien deux systèmes de lignes géodésiques semblables, savoir les deux systèmes de génératrices rectilignes, et poussé par un besoin trop prompt de généralisation, je me hasardai à conclure (sous toutes réserves) que ces deux systèmes de lignes géodésiques existaient sur une surface gauche quelconque. Je fis part de ma méthode en même temps que de mes doutes à la Société Philomathique en février 1864. M. O. Bonnet était présent. Au sortir de la séance, il me fit la remarque que l'analyse devait, en effet, indiquer généralement deux directions de lignes géodésiques remplissant la condition ci-dessus énoncée, puisque ces deux directions existent sur les surfaces gauches provenant de la déformation des surfaces du second degré; mais que l'une de ces directions, pour être acceptable, était soumise à des équations de condition qui précisément imposent à la surface gauche la nécessité d'être applicable sur une surface du deuxième degré. Je reconnus bien vite la justesse de l'observation de M. Bonnet, et, pour la confirmer, je me mis à chercher les relations qui doivent exister entre les *paramètres différentiels*

d'une surface gauche pour que cette surface soit doublement réglée. Je trouvai ainsi trois équations encore inédites qui me permirent de faire la vérification désirée.

» Ne pouvant assister à la séance suivante de la Société Philomathique, je priai M. Bonnet de vouloir bien présenter lui-même la rectification du théorème général que j'avais communiqué sous toutes réserves. Depuis lors, je ne m'en suis plus occupé, et grande fut ma surprise d'apprendre par vous, Monsieur, que l'énoncé de ce théorème avait été inséré dans votre estimable journal. Veuillez croire que si je m'en étais aperçu plus tôt, je me serais empressé d'aller au-devant de votre démarche, et de vous fournir spontanément les explications rectificatives que vous m'avez demandées.

» *P. S.* — Permettez-moi, Monsieur, à cette occasion, de vous communiquer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface gauche soit doublement réglée.

» Si l'on désigne par dp la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et par $d\omega$ leur angle, par dp' et $d\omega'$ les éléments analogues de la surface gauche conjuguée (c'est-à-dire de la surface formée par les perpendiculaires communes aux génératrices successives), ces conditions sont exprimées par les équations suivantes :

$$(1)\qquad 2\,\frac{d\omega}{dp}\cdot\frac{d^2\omega'}{dp^2}+\frac{d\omega'}{dp}\,\frac{d^2\omega}{dp^2}=0,$$

$$(2)\qquad 4\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^4-3\left(\frac{d^2\omega}{dp^2}\right)^2+4\,\frac{dp'}{dp}\,\frac{d\omega'}{dp}\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^3+2\,\frac{d\omega}{dp}\,\frac{d^3\omega}{dp^3}=0,$$

$$(3)\qquad 2\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^2\frac{d^2p'}{dp^2}+\left(\frac{dp'}{dp}\,\frac{d\omega}{dp}-4\,\frac{d\omega'}{dp}\right)\frac{d^2\omega}{dp^2}=0\ (*),$$

(*) Les quantités $\frac{d\omega}{dp}$, $\frac{d\omega'}{dp}$, $\frac{dp'}{dp}$ sont ce que j'appelle les *paramètres différentiels* de la surface gauche.

ou, en posant

$$\frac{d\omega}{dp} = k, \quad \left(\frac{d\omega'}{dp}\right)^2 = u, \quad \frac{dp'}{dp} = v,$$

et intégrant,

$$(1') \qquad k = \frac{m}{u},$$

$$(2') \qquad p = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{-u^3 + au^2 + bu - m^2}},$$

$$(3') \qquad v = \frac{(a - 2u)\sqrt{u}}{m},$$

a et b étant deux constantes.

» Si l'on remarque que v est la cotangente de l'angle i sous lequel la ligne de striction coupe la génératrice, cette dernière équation peut s'écrire

$$(3'') \qquad \cot i = \frac{(a - 2u)\sqrt{u}}{m}.$$

» De là on déduit la définition générale des surfaces réglées applicables sur les surfaces gauches du second degré. Elle est fournie par les équations $(2')$, $(3')$ dans lesquelles u est remplacé par $\frac{m}{k}$, et qui deviennent ainsi

$$(4) \quad 2p + \int \frac{dk}{\sqrt{k(-k^3 + b'k^2 + ak - m)}} = 0 \quad \left(b' = \frac{b}{m}\right),$$

$$(5) \qquad v = \frac{ak - 2m}{k\sqrt{mk}}.$$

» Dans le cas où la constante m est nulle, c'est-à-dire où la surface est un paraboloïde, ces deux formules doi-

vent être remplacées par

(6) $$k = \frac{n}{v^2},$$

(7) $$cp = \sqrt{cv^2 - n^2} + d,$$

n, c et d étant trois nouvelles constantes.

» On peut déduire de ces formules diverses conséquences géométriques intéressantes. »

QUESTIONS.

760. Étant donnée une surface du second ordre dont le centre est O, il y aura une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette surface et en même temps circonscrits à une sphère dont le centre est un point arbitrairement choisi, C; si r est le rayon de la sphère inscrite, si I est le point d'intersection du rayon vecteur OC avec le plan polaire du point C, par rapport à la surface, on a la relation

$$r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{\text{CI}}{\text{OI}},$$

$2a$, $2b$, $2c$ représentant les valeurs algébriques des axes de la surface du second ordre. (PAINVIN.)

761. Si la surface donnée est un paraboloïde, et I le centre de la section de la surface par le plan polaire du point C, on a la relation

$$r^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \text{CI},$$

$2p$ et $2q$ étant les paramètres des sections principales.

(PAINVIN.)

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES (*);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

I. — *Exposé de la méthode.*

1. Nous adopterons dans ce travail les notations de M. Chasles, et nous supposerons connus les principes de sa méthode, tels qu'ils ont été exposés ici même dans le numéro de mai (p. 193).

Nous désignerons par λ le nombre des coniques d'un système (μ, ν) qui se réduisent à une droite double limitée à deux points, et par ϖ le nombre des coniques de ce système qui ont un point double ou qui se composent de l'ensemble de deux droites. On aura donc (*voir* p. 196)

$$\lambda = 2\mu - \nu,$$

$$\varpi = 2\nu - \mu,$$

d'où l'on déduit pour les caractéristiques d'un système les expressions suivantes :

$$(1) \qquad \mu = \frac{1}{3}(2\lambda + \varpi),$$

$$(2) \qquad \nu = \frac{1}{3}(2\varpi + \lambda).$$

(*) Ce Mémoire est extrait d'une thèse écrite en danois et inttiulée : *Nouvelles contributions à la théorie des systèmes de coniques.* In-8 de 98 pages. Copenhague, 1865. L'auteur a bien voulu, à notre demande, traduire la partie de cette thèse qui contient ses recherches personnelles.

La détermination des caractéristiques d'un système dépend donc de celle des nombres λ et ϖ des *coniques singulières* qu'il contient.

2. Pour déterminer les nombres λ et ϖ, il s'agit de trouver : 1° sur quelles droites sont situées les coniques infiniment aplaties, et quels points sont doubles dans les autres coniques exceptionnelles ; 2° quelles coniques singulières de la première espèce sont situées sur chacune des droites trouvées, et quelles coniques singulières de la seconde espèce ont à chacun des points trouvés un point double ; 3° *combien de fois chacune des coniques singulières qu'on a trouvées est comptée dans les nombres* λ et ϖ.

Les deux premières questions demandent la détermination d'une droite et de deux points situés sur cette droite, ou d'un point et de deux droites passant par ce point. Les quatre conditions du système suffisent pour y répondre.

La dernière question, où l'on cherche à déterminer le coefficient avec lequel chaque conique singulière entre dans λ ou ϖ, offre de plus grandes difficultés. Nous commencerons par les systèmes simples dont les caractéristiques sont bien connues, pour nous préparer à vaincre les difficultés auxquelles donnent lieu les systèmes plus compliqués.

II. — *Détermination des caractéristiques des cinq systèmes élémentaires.*

3. On peut déterminer ces caractéristiques par notre méthode, en sachant seulement qu'il n'y a qu'une seule conique qui passe par cinq points donnés.

Nous désignerons par p la condition de passer par un point donné, et par l celle de toucher une droite; les

systèmes élémentaires seront donc

$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4) \equiv (\mu',\ \nu')$$
$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ l) \equiv (\mu'',\ \nu'')$$
$$(p_1,\ p_2,\ l_1,\ l_2) \equiv (\mu''',\ \nu''')$$
$$(p,\ l_1,\ l_2,\ l_3) \equiv (\mu^{\text{IV}},\ \nu^{\text{IV}})$$
$$(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4) \equiv (\mu^{\text{V}},\ \nu^{\text{V}})$$

λ', ϖ', λ'', ϖ'', etc., désigneront respectivement les valeurs de λ et de ϖ relatives à ces divers systèmes.

4. Le système (p_1, p_2, p_3, p_4) ne contient, en général, aucune conique infiniment aplatie ; λ' sera donc égal à o. On peut faire passer trois couples de droites par quatre points donnés, et le système contient, par conséquent, trois coniques à point double. On aura donc $\varpi' = 3x$, x étant un nombre entier et positif. Les formules (1) et (2) du n° 1 donnent

$$\mu' = \frac{1}{3}(2\lambda' + \varpi') = x, \quad \nu' = \frac{1}{3}(2\varpi' + \lambda') = 2x.$$

Or on sait que $\mu' = 1$, puisque μ' est le nombre des coniques qui passent par cinq points donnés. Donc aussi $x = 1$ et $\nu' = 2$, et

$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4) \equiv (1,\ 2).$$

5. Le système (p_1, p_2, p_3, l) ne contient aucune conique infiniment aplatie ; donc $\lambda'' = 0$.

Si la droite $p_1\,p_2$ rencontre la droite l au point o, les deux droites $p_1\,p_2$ et op_3 composeront une conique à point double qui satisfait aux conditions du système. Il y en a deux autres qui résultent d'une permutation des points donnés. Par conséquent

$$\varpi'' = 3y.$$

y étant un coefficient encore inconnu.

La substitution des valeurs trouvées de λ'' et ϖ'' dans les formules (1) et (2) donne

$$\mu'' = y, \quad \nu'' = 2y.$$

Or μ'' est le nombre des coniques qui passent par quatre points donnés, et touchent une droite donnée, soit $N(p_1, p_2, p_3, p_4, l)$. Mais nous avons exprimé par ν' ce dernier nombre. Donc $\mu'' = \nu' = 2$, et, par conséquent, $y = 2$, $\nu'' = 4$, et

$$(p_1, p_2, p_3, l) \equiv (2, 4).$$

6. Au système (p_1, p_2, l_1, l_2) appartient une conique infiniment aplatie, savoir la droite qui joint les deux points donnés, et limitée aux points où elle rencontre les droites données, et une conique à point double composée des droites qui joignent aux points donnés le point de rencontre des droites données. Donc

$$\lambda''' = 1 . z, \quad \varpi''' = 1 . u,$$

z et u étant les coefficients qui indiquent combien de fois les coniques singulières entrent respectivement dans λ''' et dans ϖ''' (*).

En transformant le système actuel au moyen du principe de dualité, on revient à un système de même espèce. On aura donc $\lambda''' = \varpi'''$, et par conséquent $z = u$.

Les formules (1) et (2) donnent maintenant

$$\mu''' = z = u = \nu'''.$$

Or

$$\mu''' = N(p_1, p_2, p_3, l_1, l_2) = \nu'' = 4.$$

Donc

$$z = u = 4, \quad \nu''' = 4, \quad \text{et} \quad (p_1, p_2, l_1, l_2) \equiv (4, 4).$$

(*) Les équations $\lambda''' = z$ et $\varpi''' = u$ n'apprennent rien sur λ''' et ϖ'''. Nous ne les écrivons ici que parce que nous aurons besoin des coefficients z et u indépendamment de cette question.

7. Au système (p, l_1, l_2, l_3) appartient la conique infiniment aplatie située sur la droite qui joint le point p au point de rencontre des droites l_1 et l_2, et limitée à ce dernier point et au point où elle rencontre la droite l_3. Il y aura dans le système encore deux coniques aplaties analogues, mais aucune conique à point double. Donc

$$\lambda^{\text{IV}} = 3\rho, \quad \varpi^{\text{IV}} = 0.$$

Au moyen des formules (1) et (2) on trouve donc

$$\mu^{\text{IV}} = 2\rho, \quad \nu^{\text{IV}} = \rho.$$

Or

$$\mu^{\text{IV}} = \text{N}(p_1, p_2, l_1, l_2, l_3) = \nu''' = 4;$$

par conséquent

$$\rho = 2, \quad \nu^{\text{IV}} = 2,$$

et

$$(p, l_1, l_2, l_3) \equiv (4, 2).$$

8. Au système (l_1, l_2, l_3, l_4) appartiennent trois coniques infiniment aplaties qui joignent deux des points où les quatre droites données se rencontrent deux à deux ; mais ce système ne contient aucune conique à point double. Donc

$$\lambda^{\text{V}} = 3 . s, \quad \varpi^{\text{V}} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\mu^{\text{V}} = 2s, \quad \nu^{\text{V}} = s.$$

Or

$$\mu^{\text{V}} = \text{N}(p, l_1, l_2, l_3, l_4) = \nu^{\text{IV}} = 2;$$

donc

$$s = 1, \quad \nu^{\text{V}} = 1, \quad \text{et} \quad (l_1, l_2, l_3, l_4) \equiv (2, 1).$$

Les caractéristiques des deux premiers systèmes élémentaires étant trouvées, celles des deux derniers auraient pu être obtenues au moyen du principe de dualité.

9. Nous avons trouvé pour les coefficients x, y, z, u, v, s les valeurs

$$x = s = 1, \quad y = v = 2, \quad z = u = 4,$$

ce qui donne lieu aux propositions suivantes dont nous allons bientôt faire usage.

On doit compter :

Dans les nombres λ qui correspondent aux systèmes élémentaires : *une fois*, toute conique infiniment aplatie, joignant deux points où quatre droites données se rencontrent deux à deux, et limitée à ces points; *deux fois*, toute conique infiniment aplatie passant par un point donné et par le point de rencontre de deux droites données, et limitée à celui-ci et au point où elle rencontre une troisième droite donnée; *quatre fois*, toute conique infiniment aplatie passant par deux points donnés, et limitée aux points où elle rencontre deux droites données;

Et dans les nombres ϖ qui correspondent aux mêmes systèmes : *une fois*, toute conique singulière composée de deux droites qui joignent deux à deux quatre points donnés; *deux fois*, toute conique ayant un point double au point d'intersection d'une droite donnée et de la droite qui joint deux points donnés, et composée de celle-ci et de la droite qui joint le point double à un troisième point donné; *quatre fois*, toute conique ayant un point double au point d'intersection de deux droites données, et composée des droites qui joignent ce point d'intersection à deux points donnés.

III. — *Détermination des caractéristiques d'un système de conique qui touchent quatre courbes données.*

10. On peut regarder le mouvement d'une conique variable qui touche continuellement une courbe donnée

à volonté, comme composé d'une suite de rotations autour des points successifs de contact, ou comme une suite de glissements, sur les tangentes en ces points. On voit par là que les coefficients des coniques singulières du système actuel, qui ne dépendent que de la variation instantanée d'une conique qui satisfait sans cesse aux conditions données, sont les mêmes que ceux des coniques singulières des systèmes élémentaires. Les théorèmes du n° 9 donnent donc lieu aux suivants :

On doit compter :

Dans le nombre λ *relatif à un système de coniques qui touchent quatre courbes données :* une seule fois, *toute conique infiniment aplatie joignant deux points où les quatre courbes se rencontrent deux à deux et limitée à ces points ;* deux fois, *toute conique infiniment aplatie touchant une courbe donnée, passant par un point de rencontre de deux autres des courbes données et limitée à ce point et à la quatrième courbe* (*) ; quatre fois, *toute conique infiniment aplatie touchant deux courbes données et limitée par les deux autres ;*

Et dans le nombre ϖ *relatif au même système :* une fois, *toute conique singulière composée d'un couple de droites dont l'une touche les deux courbes données, l'autre les deux autres ;* deux fois, *toute conique ayant un point double à l'un des points où une courbe donnée rencontre une tangente commune à deux autres, et composée de cette droite et d'une tangente par le point double à la quatrième courbe ;* quatre fois, *toute conique ayant un point double à un point de rencontre de deux courbes données, et composée de deux tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

(*) C'est-à-dire à l'un des points où elle rencontre une quatrième courbe.

11. Dans ce qui suit, nous désignons par $C_{m,n}$ la condition de toucher une courbe de l'ordre m et de la classe n ayant d points doubles, d' points de rebroussement, t tangentes doubles, et t' tangentes d'inflexion (*). Nous appellerons aussi la courbe elle-même $C_{m,n}$. Les différentes courbes seront distinguées par des indices. Le système qui nous occupe sera donc représenté par

$$(C_{m_1, n_1}, C_{m_2, n_2}, C_{m_3, n_3}, C_{m_4, n_4}).$$

Pour trouver les nombres de coniques singulières qui appartiennent aux différentes classes nommées dans le

---

(*) Ces nombres qui sont entiers et positifs satisfont encore à trois équations indépendantes l'une de l'autre qu'on peut écrire de la manière suivante :

(I) $$n = m(m-1) - 2d - 3d',$$

(II) $$m = n(n-1) - 2t - 3t',$$

(III) $$2(d-t) = (m-n)(m+n-9).$$

On peut remplacer une de ces trois équations par la suivante qui en résulte

(IV) $$d' - t' = 3(m-n).$$

Au lieu des équations (III) et (IV), on emploie souvent

$$t' = 3m(m-2) - 6d - 8d'$$

ou

$$d' = 3n(n-2) - 6t - 8t',$$

qui, avec (I) et (II) fournit le système d'équations qui portent le nom de M. Plücker (*System der analytischen Geometrie*, p. 241-270; Berlin, 1835). Les équations (III) et (IV), dont l'usage nous sera plus commode que celui des deux dernières équations de M. Plücker sont déduites de son système d'équations.

Dans ces équations, un point multiple de l'ordre r compte pour $\frac{r(r-1)}{2}$ points doubles, une tangente multiple de l'ordre r pour $\frac{r(r-1)}{2}$ tangentes doubles.

Dans la discussion actuelle, il ne sera question que du degré m et de la classe n des courbes. C'est pour les discussions suivantes que nous avons introduit les autres nombres.

n° 10, il faut se rappeler que deux courbes des ordres m_r et m_s ont $m_r . m_s$ points de rencontre, et que deux courbes des classes n_r et n_s ont $n_r . n_s$ tangentes communes.

Le nombre des coniques infiniment aplaties de la première espèce (nommée dans le n° 10) sera donc

$$m_1 m_2 . m_3 m_4 + m_1 m_3 . m_2 m_4 + m_1 m_4 . m_2 m_3 = 3 . m_1 m_2 m_3 m_4 .$$

Celui des coniques infiniment aplaties de la deuxième espèce, sera

$$\begin{aligned} & m_1 m_2 . n_3 m_4 + m_1 m_2 . n_4 . m_3 + m_1 m_3 . n_2 . m_4 + m_1 m_3 . n_4 . m_2 \\ & \quad + m_1 m_4 . n_2 . m_3 + m_1 m_4 . n_3 . m_2 + m_2 m_3 . n_1 m_4 \\ & \quad + m_2 m_3 . n_4 . m_1 + m_2 m_4 . n_1 . m_3 + m_2 m_4 . n_3 . m_1 \\ & \quad + m_3 m_4 . n_1 . m_2 + m_3 m_4 . n_2 \; m_1 \\ & = 3 \Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 . \end{aligned}$$

Celui des coniques infiniment aplaties de la troisième espèce sera

$$\begin{aligned} & n_1 n_2 . m_3 . m_4 + n_1 n_3 . m_2 . m_4 + n_1 n_4 . m_2 . m_3 \\ & \quad + n_2 n_3 . m_1 . m_4 + n_2 n_4 . m_1 m_3 + n_3 n_4 . m_1 . m_2 = \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lambda = 3 m_1 m_2 m_3 m_4 + 6 \Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 + 4 \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 .$$

De même on trouve, au moyen des théorèmes du n° 10 sur les coniques à point double,

$$\varpi = 3 n_1 n_2 n_3 n_4 + 6 \Sigma m_1 n_2 n_3 n_4 + 4 \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 .$$

La valeur de ϖ résulte de celle de λ par une permutation des lettres m et n, ce qui est aussi une conséquence du principe de la dualité. Car en transformant par ce principe le système actuel, on trouve un nouveau système

de coniques qui touchent les quatre courbes homologues aux courbes données.

En substituant les valeurs trouvées de λ et de ϖ dans les formules (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$(3a)\left\{\begin{array}{l}\mu = 2m_1m_2m_3m_4 + 4\Sigma m_1m_2m_3n_4\\ \qquad + 4\Sigma m_1m_2n_3n_4 + 2\Sigma m_1n_2n_3n_4 + n_1n_2n_3n_4,\\ \nu = m_1m_2m_3m_4 + 2\Sigma m_1m_2m_3n_4\\ \qquad + 4\Sigma m_1m_2n_3n_4 + 4\Sigma m_1n_2n_3n_4 + 2n_1n_2n_3n_4.\end{array}\right.$$

Ces valeurs de μ et ν satisfont donc à la relation (*)

$$(3b)\qquad (C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2},\ C_{m_3,n_3},\ C_{m_4,n_4}) \equiv (\mu, \nu).$$

Les formules (3a) sont encore vraies lorsque l'une des courbes données se réduit à une droite ou à un point, m et n prenant respectivement les valeurs de 1 et de 0 ou de 0 et de 1.

Lorsque $C_{m,n}$ est une *courbe générale de l'ordre m*, c'est-à-dire une courbe de cet ordre dépourvue de points doubles et de points de rebroussement, n prend, selon la formule I de M. Plücker (**), la valeur $m(m-1)$.

Ces substitutions donnent lieu à beaucoup de corollaires.

IV. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact double avec une courbe donnée et des contacts simples avec deux autres.*

12. Désignons par $2C_{m,n}$ la condition d'un contact

(*) Les formules (3) résultent de la formule générale et du corollaire du théorème LXXV, donnés par M. Chasles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 1er août 1864.

(**) *Voir* l'avant-dernière note.

double avec $C_{m,n}$, alors le système sera représenté par $(2C_{m,n}, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$.

Les théorèmes du n° 10 ont encore lieu dans ce cas-ci, où deux des quatre courbes coïncident. Seulement il faut regarder les points et les tangentes doubles de $C_{m,n}$ comme des points communs et des tangentes communes aux deux courbes qui y coïncident, et l'on doit se rappeler qu'une tangente de $C_{m,n}$ rencontre encore la même courbe en $m-2$ points, et qu'on peut, par un point de la courbe, y mener $n-2$ tangentes, outre celle qui la touche en ce point.

Cependant le système actuel contient encore d'autres coniques singulières. Lorsqu'une conique infiniment aplatie est tangente à la courbe $C_{m,n}$, quatre points d'intersection coïncident au point de contact, dont deux appartiennent à chacune des deux branches coïncidentes de cette conique singulière; mais les deux points d'intersection de l'une des branches sont séparés de ceux de l'autre, et la courbe $C_{m,n}$ n'est en général touchée que par l'une. Un seul cas fait une exception, celui où la tangente de $C_{m,n}$ qui renferme la conique infiniment aplatie est une tangente d'inflexion. Alors la conique singulière peut être regardée comme la limite d'une conique dont les deux branches qui tendent à coïncider, ont chacune avec $C_{m,n}$ un contact et une intersection qui tendent à coïncider au point d'inflexion (*). On voit donc que toute conique infiniment aplatie située sur une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par les deux autres courbes données appartient au système. Nous supposerons que le nombre de ces coniques singulières dans l'expression de λ

(*) Si la conique est réelle, $C_{m,n}$, avant l'inflexion, coupe l'une des branches de cette conique et touche l'autre; puis, après l'inflexion, elle touche la première et coupe la seconde.

est multiplié par le coefficient x que nous déterminerons plus tard (*).

Il n'est pas nécessaire de chercher séparément les coniques à point double du système, puisque le principe de dualité peut servir à déterminer ϖ, si l'expression de λ est connue ; car le système qu'on trouve en transformant par ce principe le système actuel sera de la même espèce. Seulement les courbes que doivent toucher les coniques seront remplacées par leurs réciproques. On trouve donc ϖ qui est le λ du nouveau système, par une permutation dans l'expression de λ des lettres m et n, d et t, d' et t'.

Pour plus de clarté, nous écrirons séparément les différentes parties de λ avec leurs coefficients respectifs :

$$\begin{aligned}\lambda = {} & 1\,(dm_1 m_2 + mm_1 . mm_2) \\ & + 2.\big[dn_1 m_2 + dn_2 m_1 + mm_1.(n-2)\,m_2 \\ & \qquad + mm_1 . n_2 (m-1) + mm_2 (n-2)\,m_1 \\ & \qquad + mm_2 . n_1 (m-1) + m_1 m_2 n (m-2)\big] \\ & + 4.\Big[tm_1 m_2 + nn_1 (m-2)\,m_2 \\ & \qquad + nn_2 (m-2)\,m_1 + n_1 n_2 \frac{m(m-1)}{2}\Big] \\ & + x.t' m_1 m_2.\end{aligned}$$

(*) On doit chercher avec soin s'il n'y aurait pas, dans les systèmes dont on s'occupe, plusieurs coniques singulières autres que celles qui se présentent par elles-mèmes. Dans le système actuel, on pourrait croire en trouver renfermées dans les tangentes aux points de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitées par C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2} ; mais alors, selon le principe de dualité, les coniques ayant des points doubles aux points d'inflexion de $C_{m,n}$ auraient avec elles un contact double, ce qui n'a pas lieu évidemment.

Du reste, quand on ne sait pas décider si une certaine espèce de coniques singulières appartient à un certain système, on doit introduire dans l'expression de λ ou de ϖ leur nombre multiplié par un coefficient indéterminé qui doit être entier et positif.

En faisant la permutation indiquée, on trouve

$$\begin{aligned}\varpi = \ & 1(t.n_1 n_2 + nn_1.nn_2)\\ & + 2.[tm_1 n_2 + tm_2 n_1 + nn_1(m-2) n_2 + nn_1 m_2(n-1)\\ & \quad + nn_2(m-2)n_1 + nn_2 m_1(n-1) + n_1 n_2 m(n-2)]\\ & + 4.\Big[dn_1 n_2 + mm_1(n-2) n_2\\ & \quad + mm_2(n-2) n_1 + m_1 m_2 \frac{n(n-1)}{2}\Big]\\ & + x.d' n_1 n_2.\end{aligned}$$

Les trois premiers termes de ϖ représentent les coniques à point double mentionnées dans le n° 10. Le dernier terme représente les coniques qui ont des points doubles aux points de rebroussement de $C_{m_1,n}$, et qui sont composées chacune d'une tangente à C_{m_1,n_1} et d'une tangente à C_{m_2,n_2}. Cette nouvelle espèce de coniques à point double, correspond à la nouvelle espèce de coniques aplaties que le système actuel contient. En réduisant les expressions trouvées, on aura

$$\begin{aligned}\lambda = \ & m_1 m_2 (m^2 + 6mn - 8m - 4n + d + 4t + x.t')\\ & + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)(m_2 + 2mn - m - 4n + d)\\ & + 2n_1 n_2.m(m-1),\\ \varpi = \ & n_1 n_2 (n^2 + 6mn - 8n - 4m + t + 4d + x.d')\\ & + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)(n_2 + 2mn - n - 4m + t)\\ & + 2m_1 m_2 n(n-1).\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$\mu = \mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,$$
$$\nu = \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2,$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}(4m^2 + 6mn + n^2 - 8m - 8n + t + 4d + xd'),$$

$$\mu'' = \frac{2}{3}(2m^2 + 6mn + n^2 - 6m - 9n + t + 2d),$$

$$\mu''' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + n^2 - 8m - 5n + 4t + xt' + d),$$

$$\nu' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + n^2 - 5m - 8n + t + 4d + xd'),$$

$$\nu'' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + 2n^2 - 9m - 6n + 2t + d),$$

$$\nu''' = \frac{1}{3}(m^2 + 6mn + 4n^2 - 8m - 8n + 4t + xt' + d).$$

13. Pour avoir la signification de μ', μ'', μ''', ν', ν'' et ν''', remplaçons successivement C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2} par deux points, par un point et une droite et par deux droites.

C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2} se réduisant à deux points, on a

$$m_1 = m_2 = 0 \quad \text{et} \quad n_1 = n_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu', \quad \nu = \nu'.$$

C_{m_1, n_1} se réduisant à un point, C_{m_2, n_2} à une droite, on a

$$m_1 = n_2 = 0 \quad \text{et} \quad n_1 = m_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu'', \quad \nu = \nu''.$$

C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2} se réduisant à deux droites, on a

$$m_1 = m_2 = 1 \quad \text{et} \quad n_1 = n_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu''', \quad \nu = \nu''',$$

μ', μ'', etc. sont donc les caractéristiques des systèmes de coniques qui, satisfaisant à la condition d'un double contact, satisfont en outre aux conditions élémentaires de passer par des points et de toucher des droites. M. Chasles appelle aussi ces systèmes *élémentaires*.

Cette circonstance sert à la détermination du coefficient x, car

$$\nu' = \mathrm{N}(2\mathrm{C}_{m,n}, p_1, p_2, l) = \mu'',$$
$$\nu'' = \mathrm{N}(2\mathrm{C}_{m,n}, p_1, l_1, l_2) = \mu'''.$$

La première de ces équations s'écrit

$$m^2 + 6mn + n^2 - 5m - 8n + t + 4d + xd'$$
$$= 2m^2 + 6mn + n^2 - 6m - 9n + t + 2d$$

ou

$$xd' = m(m-1) - n - 2d.$$

Or, selon l'équation (I) de M. Plücker (p. 248),

$$3d' = m(m-1) - n - 2d.$$

Par conséquent,

$$x = 3.$$

L'équation $\nu'' = \mu'''$ donnerait le même résultat.

14. En substituant $x = 3$ dans les expressions trouvées dans le n° 12 pour μ', μ'' etc., et réduisant au moyen des formules de M. Plücker, on trouve

$$(4a)\quad \begin{cases} \mu' = 2m(m+n-3) + t, \\ \mu'' = \nu' = 2m(m+2n-5) + 2t, \\ \mu''' = \nu'' = 2n(2m+n-5) + 2d, \\ \nu''' = 2n(m+n-3) + d. \end{cases}$$

Pour donner à ces expressions la forme la plus simple, nous y avons gardé les quatre nombres m, n, d et t dont chacun dépend des trois autres.

Les valeurs $(4a)$ satisfont aux relations suivantes :

$$
(4b)\ (*) \left\{
\begin{aligned}
&(2C_{m,n}, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}) \equiv [(\mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,\\
&\qquad\qquad \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2)],\\
&(2C_{m,n}, p_1, p_2) \equiv (\mu', \nu'),\\
&(2C_{m,n}, p, l) \equiv (\mu'', \nu''),\\
&(2C_{m,n}, l_1, l_2) \equiv (\mu''', \nu''').
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, $d = d' = 0$, et, selon les formules de M. Plücker,

$$n = m(m-1), \quad t = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9), \quad t' = 3m(m-2),$$

les formules $(4a)$ seront remplacées par

$$
(4c) \left\{
\begin{aligned}
&\mu' = \frac{1}{2} m(m-1)(m^2+3m-6),\\
&\mu'' = \nu'' = m(m-1)(m^2+3m-8),\\
&\mu''' = \nu'' = 2m(m-1)(m^2+m-5),\\
&\nu''' = 2m(m-1)(m^2-3).
\end{aligned}
\right.
$$

$m = 1$ donne $\mu' = \mu'' = \mu''' = \nu' = \nu'' = \nu''' = 0$;
$m = 2$ donne $\mu' = \mu'' = \mu''' = \nu' = \nu'' = \nu''' = 4$.

15. Dans le n° 13 nous avons trouvé pour le coefficient x la valeur 3; ce qui donne lieu aux théorèmes suivants :

On doit compter dans le nombre λ relatif à un système de coniques, qui ont un double contact avec une

---

(*) M. Cremona a résolu le même problème. Le savant géomètre y emploie, à côté d'autres moyens, le nombre λ du système $(2C_{m,n}, p_1, p_2)$. La différence de ses résultats et des miens n'est qn'apparente, les uns pouvant se déduire des autres au moyen des équations de M. Plücker (*voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 7 novembre 1864).

courbe $C_{m,n}$ *et des contacts simples avec les deux autres courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} :

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie située sur une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et limitée par les deux autres courbes ;*

Et dans le nombre ϖ *relatif au même système* :

Trois fois, *toute conique ayant un point double confondu avec un point de rebroussement de* $C_{m,n}$, *et composée de deux tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

V. — *Détermination des caractéristiques des autres systèmes de coniques qui ont avec deux courbes données des contacts du premier ordre, simples, doubles ou multiples.*

16. Nous aurons à trouver les caractéristiques des systèmes suivants :

($2C_{m,n}$, $2C_{m_1,n_1}$) *dont les coniques ont des doubles contacts avec les courbes* $C_{m,n}$ *et* C_{m_1,n_1} (*) ;

($3C_{m,n}$, C_{m_1,n_1}) *dont les coniques ont un contact triple avec* $C_{m,n}$, *et un contact simple avec* C_{m_1,n_1} ;

($4C_{m,n}$) *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *un contact quadruple.*

Ces systèmes ne contiennent de coniques irrégulières que celles qui sont nommées dans les n°s 10 et 15, avec la seule différence qu'à présent plusieurs courbes ont coïncidé. Pour déterminer les nombres λ et μ, nous n'aurons donc qu'à employer les théorèmes contenus dans ces numéros.

(*) MM. Chasles et Cremona ont donné le moyen d'exprimer les caractéristiques de ce système au moyen de celles des systèmes *élémentaires* de coniques qui ont avec $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} séparément un double contact (*Comptes rendus*, 22 août et 7 novembre 1864).

17. On trouve pour le système $(2C_{m,n}, 2C_{m_1,n_1})$

$$\begin{aligned}\lambda = 1 &\left[dd_1 + \frac{mm_1(mm_1-1)}{2}\right]\\ &+ 2\left[dn_1(m_1-2) + d_1n(m-2) + mm_1(n-2)(m_1-1)\right.\\ &\qquad\left. + mm_1(n_1-2)(m-1)\right]\\ &+ 4\left[t\frac{m_1(m_1-2)}{2} + t_1\frac{m(m-1)}{2} + nn_1(m-2)(m_1-2)\right]\\ &+ 3\left[t'\frac{m_1(m_1-1)}{2} + t'_1\frac{m(m-1)}{2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varpi = 1 &\left[tt_1 + \frac{nn_1(nn_1-1)}{2}\right]\\ &+ 2\left[tm_1(n_1-2) + t_1m(n-2) + nn_1(m-2)(n_1-1)\right.\\ &\qquad\left. + nn_1(m_1-2)(n-1)\right]\\ &+ 4\left[d\frac{n_1(n_1-1)}{2} + d_1\frac{n(n-1)}{2} + mm_1(n-2)(n_1-2)\right]\\ &+ 3\left[d'\frac{n_1(n_1-1)}{2} + d'_1\frac{n(n-1)}{2}\right].\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2), on trouve après une réduction assez longue (*) :

$$(5a)\left\{\begin{aligned}\mu = &\frac{1}{2}n(n-1)n_1(n_1-1)\\ &-\frac{1}{2}n[(n-1)-m(m-1)][n_1(n_1-1)-m_1(m_1-1)]\\ &+[m(m+2n-5)+t][m_1(m_1+2n_1-5)+t_1],\\ \nu = &\frac{1}{2}m(m-1)m_1(m_1-1)\\ &-\frac{1}{2}[m(m-1)-n(n-1)][m_1(m_1-1)-n_1(n_1-1)]\\ &+[n(n+2m-5)+d][n_1(n_1+2m_1-5)+d_1].\end{aligned}\right.$$

(*) Cette réduction et d'autres qui suivent se font au moyen des équations de M. Plücker (page 248) et ont pour but de donner aux expres-

La signification de ces valeurs de μ et de ν s'exprime par le symbole suivant,

$$(5\,b) \qquad (2\,C_{m,n},\ 2\,C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} sont des courbes générales des ordres m et m_1, on sait que

$$n = m(m-1), \quad d = 0, \quad t = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9),$$

$$n_1 = m_1(m_1-1), \quad d_1 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2} m_1(m_1-2)(m_1^2-9);$$

les formules $(5\,a)$ seront donc remplacées par les suivantes :

$$(5\,c) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu = {} & \frac{1}{4} m(m-1) m_1(m_1-1) \\ & \times [m(m+3) m_1(m_1+3) - 2m(3m+13) \\ & \qquad - 2m_1(3m_1+13) + 58], \\ \nu = {} & \frac{1}{2} m(m-1) m_1(m_1-1) \\ & \times [(m^2+3m-8)(m_1^2+3m_1-8) \\ & \qquad - 2(2m-3)(2m_1-3) + 1]. \end{aligned} \right.$$

Pour $m = 1$ ou $m_1 = 1$, on trouve $\mu = \nu = 0$.

Pour $m = m_1 = 2$, on trouve $\mu = \nu = 6$ (*).

18. Pour déterminer les nombres λ et ϖ du système $(3\,C_{m,n}, C_{m_1,n_1})$, on doit se rappeler qu'une tangente double rencontre encore la courbe $C_{m,n}$ en $m-4$ points, une

---

sions trouvées la forme qui me semble la plus simple et la plus commode. Comme elles ne contiennent rien de nouveau, je me borne à indiquer leurs résultats. On peut voir la justesse de ces résultats en substituant les expressions trouvées dans les équations

$$2\mu - \nu = \lambda \quad \text{et} \quad 2\nu - \mu = \varpi.$$

(*) Dans ce cas particulier, le système se divise en trois systèmes partiels dont chacun a ses caractéristiques égales à 2. (Poncelet, *Traité des Propriétés projectives*, nos 427 et suiv., dans la nouvelle édition ; *voir* aussi Chasles, *Traité des Sections coniques*, no 497).

tangente d'inflexion en $m-3$ points, et qu'on peut, par un point double de $C_{m,n}$, faire passer $n-4$ tangentes, et par un point de rebroussement $n-3$ tangentes, outre celles qui ont ces points pour points de contact. On trouve donc

$$\begin{aligned}\lambda = {} & 1 . dmm_1 \\ & + 2.[d(n-4)m_1 + dn_1(m-2) + mm_1(n-2)(m-3)] \\ & + 4.\left[t(m-4)m_1 + nn_1 \frac{(m-2)(m-3)}{2}\right] \\ & + 3.t'(m-3)m_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varpi = {} & 1 . tnn_1 \\ & + 2.[t(m-4)n_1 + tm_1(n-2) + nn_1(m-2)(n-3)] \\ & + 4.\left[d(n-4)n_1 + mm_1 \frac{(n-2)(n-3)}{2}\right] \\ & + 3d'(n-3)n_1.\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2), on trouve, après réduction,

$$\mu = \mu''.m_1 + \mu'.n_1,$$
$$\nu = \nu''.m_1 + \nu'.n_1,$$

où

$$(6a)\begin{cases}\mu' = \frac{1}{3}[2m^3 + 6m^2n - n^3 - 30m^2 - 18mn \\ \qquad + 13n^2 + 84m - 42n \\ \qquad\qquad + (6m + 3n - 26)t], \\ \mu'' = \nu' = \frac{1}{6}\{(m+n)[-(m+n)^2 - 7(m+n) + 48] \\ \qquad + 4mn[3(m+n) - 13] \\ \qquad\qquad + 2(d+t)[3(m+n) - 20]\}, \\ \nu'' = \frac{1}{3}[-m^3 + 6mn^2 + 2n^3 + 13m^2 - 18mn \\ \qquad - 30n^2 - 42m + 84n \\ \qquad\qquad + (3m + 6n - 26)d].\end{cases}$$

En posant d'abord $m_1 = 0$, $n_1 = 1$, et ensuite $m_1 = 1$, $n_1 = 0$, on remplace la courbe successivement par un point et par une droite. Dans le premier cas, les caractéristiques du système deviennent μ' et ν', dans le second μ'' et ν''. On aura donc

$$(6b) \quad \begin{cases} (3C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1, \quad \nu'' m_1 + \nu' n_1) \\ (3C_{m,n},\ p) \equiv (\mu', \nu'), \\ (3C_{m,n},\ l) \equiv (\mu'', \nu''). \end{cases}$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, les forformules $(6a)$ se réduiront, par la substitution de $n = m(m-1)$, $d = 0$, $t = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2 - 9)$, aux suivantes :

$$(6c) \quad \begin{cases} \mu' = \frac{1}{6} m(m-2)(m^4 + 5m^3 - 17m^2 - 49m + 108), \\ \mu'' = \nu' = \frac{1}{3} m(m-2)(m^4 + 5m^3 - 23m^2 - 25m + 90), \\ \nu'' = \frac{1}{3} m(m-2)(2m^4 + 4m^3 - 28m^2 - 11m + 63). \end{cases}$$

Pour $m = 2$ on aura $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 0$.

Pour $m = 3$ on aura $\mu' = 12$, $\mu'' = \nu' = 24$, $\nu'' = 48$ (*).

19. On trouve pour le système $(4C_{m,n})$,

$$\lambda = 1 . \frac{d(d-1)}{2} + 2.d(n-4)(m-4) + 4.t\frac{(m-4)(m-5)}{2} + 3.t'\frac{(m-3)(m-4)}{2},$$

$$\varpi = 1 . \frac{t(t-1)}{2} + 2.t(m-4)(n-4) + 4d\frac{(n-4)(n-5)}{2} + 3.d'\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

(*) Dans ce cas, le système se divise en trois autres où $\mu' = 4$, $\mu'' = \nu' = 8$ et $\nu'' = 16$ (*voir* un Mémoire de M. Hesse dans le *Journal de Crelle*, t. XXXVI, p. 143 et suiv.).

d'où

$$(7a)\quad \begin{cases} \mu = \frac{1}{6}\{2(m-3)(m-4)(n^2-m-n) \\ \qquad + (n-3)(n-4)(m^2-m-n) \\ \qquad + 4t(m^2-11m+28) + 2d(n^2-11n+28) \\ \qquad + (2d+t)[4(n-4)(m-4)-1] + 2d^2 + t^2\}, \\ \nu = \frac{1}{6}\{(m-3)(m-4)(n^2-m-n) \\ \qquad + 2(n-3)(n-4)(m^2-m-n) \\ \qquad + 2t(m^2-11m+28) + 4d(n^2-11n+28) \\ \qquad + (d+2t)[4(n-4)(m-4)-1] + d^2 + 2t^2\}. \end{cases}$$

et

$$(7\,b)\qquad (4\,C_{m,n}) \equiv (\mu, \nu)$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m,

$$(7c)\quad \begin{cases} \mu = \frac{1}{24} m(m-2)(m-3)(m^5+9m^4-15m^3 \\ \qquad\qquad -225m^2+140m+1050), \\ \nu = \frac{1}{12} m(m-2)(m-3)(m^5+9m^4-27m^3 \\ \qquad\qquad -153m^2+170m+546). \end{cases}$$

Pour $m=2$ ou $m=3$, on aura $\mu=\nu=0$.
Pour $m=4$, on aura $\mu=126$, $\nu=252$ (*).

(*) Dans ce cas, le système se divise en soixante-trois autres (*voir* un Mémoire de M. Hesse dans le *Journal de Crelle*, t. XLIX, p. 279). Les coniques d'un système partiel, dont les caractéristiques sont 2 et 4, appartiennent à un même *réseau* du premier ordre, ce qui donne lieu à plusieurs analogies avec les droites tangentes à une conique (ce que j'ai montré dans le *Journal de Mathématiques de Copenhague*, p. 154; 1863).

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

Soit

$$X = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

une équation de degré n; soient a, b,..., l ses racines, et

$$\begin{cases} R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0, \\ R_1 = \alpha_1 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} = \alpha_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-1} x^{n-2} + \gamma_{n-1} x^{n-3} + \ldots + \lambda_{n-1} \end{cases}$$

n fonctions de degré $n - 1$ se déduisant toutes de la première R_0, laquelle n'est autre chose que la dérivée X_1 de X, par la suite d'équations

$$R_1 = x R_0 - \alpha_0 X,$$
$$R_2 = x R_1 - \alpha_1 X,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{n-1} = x R_{n-2} - \alpha_{n-2} X.$$

Toutes ces fonctions R_i se calculeront donc avec une grande rapidité, et l'on a d'ailleurs

$$R_i = \sum \frac{a^i}{x - a} X.$$

Cela posé :

1° On aura en général

$$\alpha_i = \sum \alpha^i.$$

En d'autres termes, *les coefficients* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *sont*

les sommes des puissances semblables des degrés o, 1,... $n-1$ *des racines de l'équation proposée.*

2° En appelant X, X_1, X_2,..., X_n les fonctions de Sturm, ou plutôt celles de M. Sylvester, qui n'en diffèrent que par des facteurs constants positifs, nous aurons

$$X_1 = R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0,$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_1 \end{vmatrix},$$

$$X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 x^{n-3} + \ldots + \lambda_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

et enfin

$$X = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, \ldots, & \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \ldots, & \lambda_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1}, & \beta_{n-1}, & \gamma_{n-1}, \ldots, & \lambda_{u-1} \end{vmatrix}.$$

Ces formules fournissent un moyen facile à retenir, et très-rapide dès que l'on a un peu l'habitude du calcul numérique des déterminants, pour obtenir les fonctions sturmiennes par de simples multiplications. Elles permettent même, aussitôt que les fonctions R_i sont calculées, d'écrire immédiatement le terme affecté d'une puissance quelconque de x, dans l'une quelconque des fonctions X_i, indépendamment de tous les autres termes. Les formes diverses données par MM. Sylvester, Cayley, Brioschi, Hermite se déduisent sans peine des formules précédentes, ainsi que les expressions des facteurs par lesquels il faut multiplier les fonctions X_i pour passer aux fonctions de Sturm.

3° *Le dernier terme* H *de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation* $X = 0$, ou le pro-

duit de ces carrés, se déduit aussi du calcul des fonctions R_i, puisque l'on sait (*Journal de Liouville*, t. VII, p. 368) que ce dernier terme ne diffère pas de la dernière fonction X_n de M. Sylvester. On a donc

$$H = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, \ldots, & \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, \ldots, & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1}, & \beta_{n-1}, \ldots, & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Appliquons cette méthode à l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

il vient immédiatement

$$R_0 = 3x^2 + 2px + q,$$
$$R_1 = -px^2 - 2qx - 3r,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^2 + (pq - 3r)x + pr,$$

d'où

$$H = \begin{vmatrix} 3, & -p, & p^2 - 2q \\ 2p, & -2q, & pq - 3r \\ q, & -3r, & pr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & p, & 2q \\ 2p, & 2q, & pq + 3r \\ q, & 3r, & 2pr \end{vmatrix}$$
$$= 18pqr - 27r^2 + p^2q^2 + 4p^3r - 4q^3.$$

De même, l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

nous donnera

$$R_0 = 4x^3 + 3px^2 + 2qx + r,$$
$$R_1 = -px^3 - 2qx^2 - 3rx - 4s,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^3 + (pq - 3r)x^2 + (pr - 4s)x + ps,$$
$$R_3 = [(pq - 3r) - p(p^2 - 2q)]x^3 + [pr - 4s - q(p^2 - 2q)]x^2$$
$$+ [ps - r(p^2 - 2q)]x - s(p^2 - 2q).$$

En formant le déterminant H et opérant les réductions bien connues, il vient de suite

$$H = - \begin{vmatrix} 4, & p, & 2q, & 3r \\ 3p, & 2q, & pq + 3r, & 2pr + 4s \\ 2q, & 3r, & 2pr + 4s, & 3ps + qr \\ r, & 4s, & 3ps, & 2qs \end{vmatrix};$$

il reste donc simplement à développer ce déterminant.

Ce procédé pour calculer le dernier terme de l'équation aux carrés des différences semble offrir sur les autres (Serret, *Algèbre supérieure*, 2ᵉ édit., p. 30 et 452) l'avantage d'être facile à retenir, de s'appliquer directement aux équations numériques, et de ne point exiger que l'on forme d'abord ce terme, pour toutes les équations de degré inférieur à n, avant d'arriver à l'équation de degré n.

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 12 février 1866.)

QUESTION D'EXAMEN;

Par M. A. P.,
Élève de l'École Polytechnique.

Les six normales menées par un point à une surface du second degré se trouvent sur un cône du second degré.

Cet énoncé constitue un théorème, car cinq droites suffisent pour déterminer un cône du second degré.

Remarque. — Le diamètre passant par le pied d'une normale à la surface est le conjugué du plan tangent en ce point. On en déduit cet énoncé nouveau :

Les six normales à une surface du second degré,

menées par un point, se trouvent sur le cône des droites issues de ce point et telles qu'elles rencontrent le diamètre conjugué aux plans qui sont perpendiculaires à ces droites.

Le cône est du second degré, car il coupe un plan principal de la surface suivant une courbe du second degré.

Les constructions employées en Géométrie descriptive pour trouver les traces d'une droite nous fournissent les éléments de la démonstration qui s'appuie du reste sur les principes généraux de l'homographie et sur les deux lemmes suivants:

Lemme I. — *La projection d'un diamètre sur un plan principal et la trace du plan diamétral conjugué sont deux diamètres conjugués de la section principale.*

Lemme II. — *Dans le plan d'une conique, le lieu des intersections d'un diamètre avec la droite perpendiculaire à son conjugué, issue d'un point fixe, est une hyperbole équilatère passant par le centre de la conique et par le point fixe et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique proposée.*

Je prends pour plans de projection deux plans principaux de la surface; soient A, l'axe situé sur la ligne de terre; B, le second axe horizontal; C', l'axe vertical; M, m, m' le point fixe et ses projections; L, l et l' une droite et ses projections. Cette droite passe par le point M; elle rencontre le diamètre conjugué du plan P, qui lui est perpendiculaire. Soient p et p' les traces de ce plan, qui sont respectivement perpendiculaires à l et à l'. D, d, d' représentent le diamètre conjugué de P et ses projections. D'après le lemme I, d est conjugué de p dans le plan horizontal, et d' conjugué de p' dans le plan vertical. Les droites D et L se rencontrent par hypothèse en N, qui se projette en n et n' intersections de (l et d) et de (l' et d'). D'après le lemme II, le point n décrit dans le plan

horizontal une hyperbole équilatère S passant par le point m et par le centre de la surface, ayant ses asymptotes parallèles à la ligne de terre A et au second axe B. Le lieu du point n' est une hyperbole analogue S', située dans le plan vertical. La ligne nn' coupe la ligne de terre en ν et lui est perpendiculaire en ce point. Les deux faisceaux l et $n\nu$, issus tous deux de deux points de l'hyperbole S (ces points sont m et le point à l'infini dans la direction B), se coupant en n sur cette hyperbole, sont homographiques. De même, l' et $n'\nu$ sont homographiques, νn et $\nu n'$ le sont entre eux ; donc les faisceaux l et l' sont homographiques. La trace α de la ligne L sur le plan horizontal s'obtient en prolongeant l' jusqu'à la ligne de terre en α' et élevant la perpendiculaire $\alpha'\alpha$ jusqu'à sa rencontre avec l'. Les faisceaux l' et $\alpha'\alpha$ sont homographiques. Donc $\alpha\alpha'$ et l' forment deux faisceaux homographiques. Leur point de rencontre décrit donc une conique. Le cône auquel appartient la droite L est donc du second degré; il contient les six normales, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈMES SUR LES TÉTRAÈDRES;

Par M. MARMIER,
Élève de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

Théorème I. — *A tout tétraèdre correspond un ellipsoïde tangent aux six arêtes du tétraèdre en leurs points milieux.*

Je rappellerai d'abord une proposition bien connue :

Lemme. — *A tout triangle correspond une ellipse tangente aux côtés en leurs points milieux.*

Soit un triangle ABC : je considère l'ellipse tangente aux deux côtés a et b du triangle, en leurs points milieux α et β, et passant par le point milieu du troisième côté c.

La droite $\alpha\beta$ est la polaire du point p par rapport à la conique. La droite qui passe par le point c et par le milieu de cette droite $\alpha\beta$ est le diamètre des cordes parallèles à $\alpha\beta$.

D'ailleurs, ce diamètre passant par le point milieu de la droite $\alpha\beta$ passe par le point milieu γ du côté c. C'est donc son extrémité ; la tangente en ce point est donc parallèle à la direction de la corde $\alpha\beta$: donc c'est le côté c.

Je considère maintenant un ellipsoïde passant par les six points milieux des arêtes du tétraèdre, et tangente à trois arêtes issues d'un même sommet.

Chacune des faces adjacentes à ce sommet A déterminera dans l'ellipsoïde une section elliptique tangente à deux côtés du triangle de la face considérée et passant par les points milieux des côtés de ce triangle; donc cette ellipse sera tangente au troisième côté de ce triangle.

Il en est de même pour les deux autres faces adjacentes au sommet A.

Donc les trois arêtes de la face opposée à ce sommet sont tangentes à l'ellipsoïde.

Les lignes joignant les points milieux des arêtes du tétraèdre se coupent, d'après un théorème connu, mutuellement en deux parties égales, et leur point de rencontre est le centre de gravité du tétraèdre; donc ce point est aussi le centre de l'ellipsoïde.

Théorème II. — *Dans un tétraèdre* ABCD, *dont les hauteurs concourent en un même point* H, *les normales élevées à chaque face par son centre de gravité se rencontrent en un même point* H_1 (*voir* 2ᵉ série, t. II, p. 135).

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les centres de gravité des faces opposées aux sommets A, B, C, D; p, q, r, s les pieds des hauteurs correspondantes; αN, $\beta N'$, $\gamma N''$, $\delta N'''$ les normales élevées à chaque face par son centre de gravité.

La ligne $\alpha\beta$ est parallèle au côté AB. Le plan $\alpha\beta N$ est parallèle au plan des deux droites AB et AH, puisque $\alpha\beta$ est parallèle à AB et αN à Ap.

Le plan des deux droites AB, $\alpha\beta$ est donc parallèle à la droite Bq contenue dans le plan des deux droites ABH; donc, si par le point β du plan (AB, $\alpha\beta$) je mène une parallèle à la droite Bq, cette droite sera tout entière contenue dans le plan. Mais la droite Bq est perpendiculaire à la face ACD opposée au sommet B; donc la parallèle qui lui est menée par le point β sera aussi perpendiculaire à cette même face. Ce sera donc la normale $\beta N'$; donc les deux normales αN, $\beta N'$ sont situées dans un même plan. Soit H_1 leur point de rencontre. Les deux triangles semblables ABH, $\alpha\beta H_1$ donnent

$$(1) \qquad \frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha H_1}{AH} = \frac{1}{3}.$$

Par la même raison, les normales αN et $\gamma N''$ sont situées dans un même plan; elles se rencontrent en un point H_2. Je dis que ce point se confond avec le point H_1. En effet, les deux triangles semblables $\alpha\gamma H_2$, ACH donnent la proportion

$$(2) \qquad \frac{\alpha\gamma}{AC} = \frac{\alpha H_2}{AH} = \frac{1}{3}.$$

De la comparaison des égalités (1) et (2) on tire

$$\frac{\alpha H_1}{AH} = \frac{\alpha H_2}{AH}:$$

le point H_2 se confond donc avec le point H_1

Trois quelconques des normales élevées aux faces par leur centre de gravité concourent en un même point; elles y concourent donc toutes. C. Q. F. D.

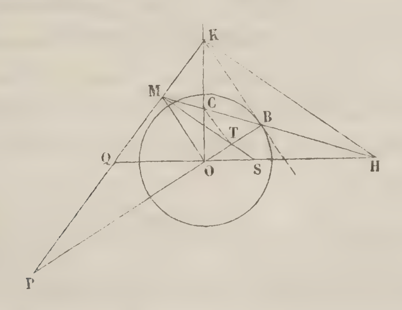
CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A LA COURBE D'OMBRE DE LA VIS;

PAR M. CHEMIN,
Élève de l'École Polytechnique.

La méthode de Roberval, qui permet d'obtenir les tangentes à un assez grand nombre de courbes, a conduit M. Poncelet à une construction de la tangente à la courbe d'ombre de la surface de la vis à filet triangulaire.

On peut aussi arriver à une construction fort simple de la même tangente, en faisant usage des principes donnés par M. Chasles dans son *Traité de Géométrie supérieure*.

La courbe d'ombre est ainsi définie : un cercle et un point dans son plan étant donnés, par le point H on mène



une transversale qui rencontre le cercle au point B. On joint le point B au centre O du cercle, et en menant la

ligne OM perpendiculaire à OB, le point M d'intersection de cette ligne avec HB est un point de la courbe d'ombre. Le lieu des points M obtenus ainsi en faisant varier HB est la courbe dont il faut déterminer la tangente en un point quelconque, M par exemple.

Supposons que le point B, au lieu de se déplacer sur le cercle, se déplace sur la tangente en B à ce cercle : les deux droites BH et OB, et par suite BH et OM, forment deux faisceaux homographiques, et le lieu des points d'intersection des rayons correspondants est une conique. D'après la manière dont elle est engendrée, cette conique a au point M un élément commun avec la courbe d'ombre, et par suite la même tangente en ce point. Donc il suffit de chercher la tangente à la conique au point M.

Pour cela, cherchons dans chacun des faisceaux le rayon correspondant à OH, considéré comme appartenant à l'autre. Ces deux rayons sont OK, perpendiculaire à OH, et HK joignant le point H avec le point K d'intersection de la tangente en B avec OK. Pour obtenir la tangente, il faut, d'après les principes connus, joindre MK et prolonger cette droite jusqu'à sa rencontre en Q avec OH, et prendre le conjugué harmonique de ce point par rapport à O et H. Soit S ce point, MS est la tangente cherchée.

Soient P et T les points d'intersection de MP et MS avec OP.

Nous avons l'égalité des deux faisceaux harmoniques

$$\{M - Q.\, O.\, S.\, H\} = \{M - P.\, O.\, T.\, B\}.$$

Donc on aura

$$\frac{PO}{PB} = \frac{TO}{TB}.$$

Mais les triangles semblables MOP, KBP nous donnent

$$\frac{PO}{PB} = \frac{MO}{BK} = \frac{MC}{CB},$$

conséquence de la similitude des triangles MOC, KCB ; donc

$$\frac{TO}{TB} = \frac{MC}{CB}.$$

Donc le point T se trouve sur la parallèle à MO, ou KB, menée par le point C d'intersection de BH avec OK. On a donc enfin la construction suivante : par le point C mener la parallèle à BK jusqu'à rencontre de OB en T ; la droite MT est la tangente cherchée.

Une construction du même genre donnerait la tangente en un point quelconque de la cissoïde.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 556

(voir tome XIX, page 464) ;

Par M. Merce BUSCO.

C_1, C_2, C_3 *sont trois cônes de même degré ayant leurs trois sommets sur la même droite; si* C_1 *coupe* C_3 *suivant une courbe plane, et que* C_2 *coupe* C_3 *suivant une courbe plane,* C_1 *et* C_2 *se couperont aussi suivant une courbe plane et les trois plans passeront par la même droite.* (Steiner.)

On peut prendre pour plans des zx et des zy le plan de la base commune de C_1 et C_3 et celui de la base de C_2 et C_3. Quant au plan des xy ce sera un plan *quelconque* mené par la ligne des sommets S_1, S_2, S_3. Ce plan coupe C_3 suivant un système de m droites dont les coordonnées

à l'origine seront désignées par a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n. Soient en outre α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 les coordonnées x, y des trois sommets, et A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,..., B_m les points où les droites dont on vient de parler coupent respectivement l'axe OX et l'axe OY. Les droites $S_3 A_1$, $S_2 A_1$, $S_1 B_1$ auront pour équations

$$y = \frac{\beta_3}{\alpha_3 - a_1}(x - a_1),$$

$$y = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - a_1}(x - a_1),$$

$$y - \beta_1 = \frac{\beta_1 - b_1}{\alpha_1}(x - \alpha_1).$$

Si entre les deux dernières on élimine le terme indépendant de x, y et que l'on tienne compte de ce que les points A_1, S_3, B_1 sont en ligne droite, ainsi que S_1, S_2, S_3, on trouve

$$y = \frac{\beta_2(\beta_1 - \beta_3)}{\alpha_1(\beta_2 - \beta_3)}x,$$

ce qui montre que les m points obtenus d'une manière analogue en cherchant l'intersection des couples de droites $S_2 A_2$, $S_1 B_2$; $S_2 A_3$, $S_1 B_3$, etc., sont sur une même droite OD représentée par l'équation précédente. Si l'on cherche l'intersection I de cette droite avec la ligne des sommets, on trouve

$$x - \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \beta(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2},$$

$$y - \beta_3 = \frac{\alpha_1 \beta(\beta_2 - \beta_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2};$$

d'où résulte

$$\overline{IS_3} = \frac{\alpha_1 \beta}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1} \cdot \overline{S_2 S_3}.$$

Maintenant il est facile de voir que si l'on fait tourner

le plan des xy d'un angle quelconque autour de la ligne des sommets, les x des points situés sur cette ligne se trouvent multipliés par un même facteur et les y par un autre facteur commun. D'après cela, les m points en ligne droite de l'intersection de C_1 et C_2 qu'on trouverait comme tout à l'heure seraient sur une droite O′D′ qui rencontrerait la ligne des sommets exactement au point I où la ligne OD la rencontrait. (Ceci résulte de la remarque précédente et de ce que $\overline{IS_3}$ contient haut et bas les α et les β au même degré séparément dans son expression où $\overline{S_2 S_3}$ ne change pas.) Donc, quand le plan des xy tournera d'une manière continue autour de la ligne des sommets, chacun des m points situés sur OD décrira une branche de courbe qui ne sortira jamais du plan fixe ZOI. L'ensemble de ces branches constituera la section plane commune aux deux cônes C_1, C_2. L'intersection complète de ces surfaces s'obtiendrait en combinant chacune des droites, telles que $S_3 A_1$, avec chacune des autres $S_3 B_1$, $S_3 B_2$, $S_3 B_m$. Mais il est visible qu'à l'exception des droites où A et B ont le même indice, on n'obtiendrait pas généralement des points donnant lieu comme ci-dessus à des branches planes.

Ce procédé ne diffère pas de celui qu'on emploie dans la Géométrie descriptive pour trouver l'intersection de deux surfaces coniques *quelconques*, et il est clair que ce qu'on vient de dire peut leur être appliqué littéralement. On peut donc énoncer le théorème suivant, dont celui de Steiner doit être considéré comme un cas particulier :

Si trois surfaces coniques ont leurs sommets en ligne droite, et que l'une d'elles rencontre chacune des autres suivant une courbe plane, ces deux dernières admettent aussi une courbe plane commune.

Même question;

PAR M. VIANT.

C_1, C_2, C_3 sont trois cônes du même degré, ayant leurs trois sommets sur la même droite $A_1 A_2 A_3$; C_1 coupe C_2 suivant une courbe plane B_3; C_1 et C_3 se coupent suivant la courbe plane B_2; C_3 et C_2 se couperont aussi suivant une courbe plane B_1, et les trois plans passeront par la même droite.

Je supposerai la figure engendrée de la manière suivante. Je décris sur B_3 comme base les deux cônes C_1 et C_3. Je considère une section plane B_2 de C_1 comme directrice du cône C_3. Je dis que la courbe de rencontre des deux cônes C_2 et C_3 est plane, et que son plan passe par l'intersection des plans B_2 et B_3.

Supposons d'abord B_3 réduit à une ligne droite; B_2 et B_1 seront dès lors des droites; B_1, B_2, B_3 sont deux à deux dans le même plan, par suite se coupent en un même point O. Ceci suppose que ces trois lignes ne sont pas toutes les trois dans le même plan, auquel cas on pourrait considérer la figure, alors complétement plane, comme projection d'une figure dont les éléments ne seraient plus dans le même plan.

Si les cônes avaient pour bases des couples de droites, on obtiendrait deux points tels que O, et, en les joignant, on aurait une droite suivant laquelle se couperaient les trois figures planes considérées.

Cela posé, prenons le cas général. Traçons dans B_3 les droites M_3, N_3 et prenons le point P_3 sur la courbe; à ces éléments correspondront dans B_2 les droites M_2, N_2 et le point P_2; dans B_1 les éléments M_1, N_1, P_1. P_1, qui est un point de la courbe B_1, appartient au plan $(M_1 N_1)$; car si l'on mène par P_3 une droite qui coupe M_2 et N_3,

la figure correspondante de B_1 sera une droite coupant M_1 et N_1. Donc tout point P_1 de la courbe B_1 appartient au plan $(M_1 N_1)$; et d'ailleurs on sait que les trois plans $(M_1 N_1)$, $(M_2 N_2)$, $(M_3 N_3)$ se coupent suivant la même droite.

On a vu que trois droites correspondantes se coupaient au même point : le même théorème devra avoir lieu pour les tangentes en trois points correspondants ; et ceci n'exige pas que les courbes de rencontre soient planes.

Si les courbes sont planes, ce point décrit l'arête commune des trois plans.

Question 613

(voir 2e série, t. I, p. 125);

PAR M. BAUQUENNE,
Candidat à l'École Normale.

On donne une conique et un point fixe F *dans son plan. Du point* F *on mène deux droites perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en deux points. On joint ces points par la droite* Γ *et l'on mène en chacun d'eux les tangentes* Σ, Σ' *à la conique ; on projette le point* F *sur les trois côtés du triangle* ΣΓΣ', *par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence. Démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.* (MANNHEIM.)

Le lieu du sommet γ d'un angle droit $\sigma\gamma\sigma'$ circonscrit à une conique s est un cercle c.

Le cercle c et la conique s étant concentriques et la droite qui va du centre commun au point γ passant par le

milieu de $\sigma\sigma'$, le cercle décrit sur $\sigma\sigma'$ comme diamètre passera par γ et sera tangent en ce point au cercle c.

Je transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un point F.

La conique s devient une conique S, σ et σ' deviennent deux tangentes Σ et Σ' à S, et γ devient leur corde des contacts Γ. L'angle $\sigma\gamma\sigma'$ étant droit, les droites qui vont du point F aux points (Σ, Γ), (Σ', Γ) sont rectangulaires.

Le cercle c, lieu du point γ, devient une conique dont le foyer est F, enveloppe de Γ, dont le centre ω est déterminé.

Le cercle qui passe par les trois points σ, γ, σ' devient une conique ayant pour foyer F et tangente aux trois droites Σ, Γ, Σ', et comme ce cercle a même tangente en γ que le cercle c, les deux coniques transformées des deux cercles sont tangentes en un même point θ à la droite Γ.

Je projette F sur les trois tangentes à la transformée de $\sigma\gamma\sigma'$; soit p le point qu'on trouve ainsi sur Γ.

Le cercle qui passe par ces trois points a, d'après un théorème connu, pour centre le centre de la conique transformée du cercle variable, que j'appellerai ω'.

Le cercle analogue pour la transformée de c passe aussi par p et a pour centre ω.

Si donc les trois points p, ω, ω' sont en ligne droite, les cercles variables seront tous tangents à ce cercle fixe.

Soit φ le point symétrique de F par rapport à Γ, $\varphi\theta$ et Fω se croisent au second foyer f de la conique fixe transformée de c, $\varphi\theta$ et Fω' se croisent au second foyer f' de la conique variable transformée de $\sigma\gamma\sigma'$.

Les milieux p, ω, ω' des droites Fφ, Ff, Ff' sont donc sur une parallèle à $\varphi\theta$, c'est-à-dire en ligne droite, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On sait que dans une transformation telle que la précédente, c'est la polaire du point F par

rapport au cercle à transformer qui fournit le centre de la conique transformée de ce cercle.

Quand trois points sont en ligne droite, leurs polaires passent par un même point.

La polaire de ω est la polaire de F par rapport à c.

La polaire de ω' est la polaire de F par rapport à $\sigma\gamma\sigma'$.

La polaire de p est la perpendiculaire en γ à la droite $F\gamma$.

Donc, dans la figure primitive, ces trois droites passent par un même point.

Question 725

(voir 2e série, t. IV, p. 141);

PAR M. LEBASTEUR,
Élève ingénieur de la Marine.

Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x^2+2)^2+x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2.$$

(LEBASTEUR.)

Posons

(1) $$x+1=y,$$

alors on a

(2) $$(y^2+1)^3 = (y-1)^4(y+1)^2,$$

qui s'écrit

(3) $$(y^2+1)^3 = (y^2-1)^2(y-1)^2.$$

Je pose

$$y+\frac{1}{y} = z.$$

Divisée aux deux membres par y_3, l'équation (3) de-

vient

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^3=\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\frac{(y-1)^2}{y}$$

$$=\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\left(y+\frac{1}{y}-2\right)$$

$$=\left(y^2+\frac{1}{y^2}-2\right)^2\left(y+\frac{1}{y}-2\right).$$

Observant que

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2,$$

on a

$$z^3=(z^2-2)(z-2)$$

ou

$$z^2+z-2=0,$$

d'où

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Or on a

$$y^2-zy+1=0,$$

$$y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$$

et

$$x=y-1;$$

on a donc

$$x=\frac{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\frac{(-1\pm\sqrt{5})^2}{4}-4}}{2}-1.$$

Il faut ajouter à ceci la racine -1, que nous ne trouvons pas parce que nous avons divisé par y^3 qui, dans l'hypothèse $y=0$, donne $x=-1$.

Les racines, au nombre de cinq, sont donc

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}}{4} \sqrt{-1} - 1,$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}}{4} \sqrt{-1} - 1,$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}}{4} \sqrt{-1} - 1,$$

$$x_5 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}}{4} \sqrt{-1} - 1.$$

On voit que la seule racine -1 est réelle, les quatre autres sont imaginaires; mais il est fort remarquable que cette équation du cinquième degré soit entièrement résoluble par des équations du deuxième.

Question 728

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 142);

Par M. Venceslas NIEBYLOWSKI,
Élève de spéciales au lycée Bonaparte.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ *les racines de l'équation*

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 \\ &\qquad + (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

démontrer que la racine ε *est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation.* (Michael Roberts.)

Outre la relation donnée, on a, entre les racines et les coefficients de l'équation, les relations suivantes :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = -p,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon = q,$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon = -r,$$

$$\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon = s,$$

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = -t.$$

Ces relations peuvent s'écrire

(1) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -(p + \varepsilon),$$

(2) $$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q + \varepsilon(p + \varepsilon),$$

(3) $$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

(4) $$\alpha\beta\gamma\delta = s + \varepsilon\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

(5) $$\alpha\beta\gamma\delta = -\frac{t}{\varepsilon}.$$

En développant l'équation de condition et divisant par 2, on a

$$(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 6\alpha\beta\gamma\delta - [\alpha^2(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) + \beta^2(\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta) + \gamma^2(\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta) + \delta^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)] = 0,$$

ou, pour simplifier l'écriture,

(6) $$\sum + 6\alpha\beta\gamma\delta - \sum_1 = 0.$$

Si l'on élève (2) au carré, il vient

(7) $$[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2 = \sum + 6\alpha\beta\gamma\delta + 2\sum_1.$$

Donc, en vertu de l'équation (6),

(8) $$3\sum_1 = [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2.$$

Mais si l'on multiplie (3) successivement par α, β, γ, δ et que l'on fasse la somme des deux membres, on obtient

$$\sum_1 + 4\alpha\beta\gamma\delta = (p+\varepsilon)\{r+\varepsilon[q+\varepsilon(p+\varepsilon)]\},$$

d'où

$$3\sum_1 = 3(p+\varepsilon)\{r+\varepsilon[q+\varepsilon(p+\varepsilon)]\}$$
$$- 12s - 12\varepsilon\{r+\varepsilon[q+\varepsilon(p+\varepsilon)]\},$$

$$(9)\quad 3\sum_1 = 3(p-3\varepsilon)\{r+\varepsilon[q+\varepsilon(p+\varepsilon)]\} - 12s;$$

donc, en vertu de l'équation (8),

$$(10)\quad [q+\varepsilon(p+\varepsilon)]^2 = 3(p-3\varepsilon)\{r+\varepsilon[q+\varepsilon(p+\varepsilon)]\} - 12s,$$

ou, en développant,

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} 10\varepsilon^4 + 8p\varepsilon^3 + (11q - 2p^2)\varepsilon^2 \\ \qquad + (qr - pq)\varepsilon + q^2 - 3pr + 12s = 0; \end{array}\right.$$

or (4) et (5) nous donnent

$$(12)\qquad \varepsilon^5 + p\varepsilon^4 + q\varepsilon^3 + r\varepsilon^2 + s\varepsilon + t = 0,$$

ce qui d'ailleurs est évident, puisque ε est racine de l'équation donnée.

Ainsi, en éliminant α, β, γ, δ entre l'équation de condition et (1), (2), (3), (4), on arrive à une équation du quatrième degré; on a donc, grâce à la relation donnée, abaissé d'une unité le degré de l'équation en ε.

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) n'étant pas toutes symétriques par rapport à α, β, γ, δ, ε, il est évident que, dans les équations (11) et (12), ε désigne seulement la cinquième racine, de sorte que *ces équations ayant en commun seulement* (d'après l'élimination de α, β, γ, δ) *la racine* ε, il doit exister entre leurs premiers membres un plus grand commun diviseur du premier

degré; donc la racine ε est fonction rationnelle des coefficients de l'équation.

D'ailleurs, en exprimant que les premiers membres des équations (11) et (12) ont un plus grand commun diviseur du premier degré, on trouvera la condition qui doit exister entre les coefficients pour que la relation (I) ait lieu entre les quatre racines.

Note du Rédacteur. — Il résulte de la démonstration précédente que l'énoncé de M. Michael Roberts doit être complété par l'addition suivante: « S'il n'existe qu'un seul groupe de quatre racines qui satisfasse à l'équation (I) ». Car ce n'est qu'à cette condition que les deux équations (11) et (12) ont un seul facteur commun du premier degré et par conséquent rationnel par rapport aux coefficients. L'équation qui a pour racines les nombres 1, 2, 3, $2+\frac{1}{3}\sqrt{-3}$, $2-\frac{1}{3}\sqrt{-3}$ est propre à démontrer l'utilité de cette addition à l'énoncé, car les trois premières racines satisfont à la relation (I) avec l'une ou l'autre des deux dernières; ε a donc deux valeurs imaginaires dont aucune n'est une fonction rationnelle des coefficients, parce que ceux-ci sont rationnels.

M. Merce Busco a résolu la question 728 à peu près de la même manière. P.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XVIII.

Frenet (F.), ancien Élève de l'École Normale, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. — *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.* 2e édition. In-8° de XIV-394 pages et 2 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1866. — Prix : 7 fr. 50 c.

La première édition de cet ouvrage (1856) ne contenait que 220 pages, tandis que la nouvelle en a 394. L'augmentation

très-considérable, comme on le voit, porte principalement sur la première Partie, qui se rattache au Calcul différentiel et peut être aisément comprise des Élèves de Mathématiques spéciales, mis au fait de la notation différentielle. Cette notation est d'ailleurs exposée en tête du livre.

Dans les Exercices nouveaux ajoutés à l'ancienne édition, et qui la complètent heureusement, M. Frenet continue à mériter les éloges que nous lui avions donnés en 1857 dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire, etc.*, p. 26. Les questions sont bien choisies, les réponses exposées d'une manière succincte, mais très-claire, avec des renseignements historiques et des renvois aux sources toutes les fois que la question en vaut la peine. L'ouvrage s'adresse aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et à toute personne qui veut approfondir le Calcul infinitésimal.

XIX.

Serret (J.-A.), Membre de l'Institut. — *Cours d'Algèbre supérieure.* 3e édition; 2 vol. in-8° de xv-644 et xiv-664 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1866. — Prix : 24 francs.

Cette troisième édition est en quelque sorte un ouvrage nouveau. Non-seulement l'auteur a refondu dans le texte les nombreuses Notes qui accompagnaient la seconde édition, mais il y a fait des additions nombreuses dont les principales se rapportent à la théorie des substitutions et à la résolution algébrique des équations. La division en Leçons, très convenable dans l'ouvrage primitif, a été remplacée par la division en cinq Sections. La première Section renferme la théorie générale des équations et les principes sur lesquels repose leur résolution numérique; on y trouve en particulier une théorie très-développée des fractions continues. La deuxième Section comprend la *théorie des fonctions symétriques*, celle des *fonctions alternées* et des déterminants, avec des applications importantes à la théorie générale des équations. La troisième a pour

objet l'*ensemble des propriétés des nombres entiers*, étudiées en vue de la résolution algébrique des équations, et, en particulier, une étude complète et nouvelle des fonctions entières d'une variable *prises relativement à un module premier*. La quatrième Section renferme la théorie des substitutions, et la cinquième tout ce qui se rapporte à la *résolution algébrique des équations*. En présentant son ouvrage à l'Académie des Sciences, M. Serret a exposé lui-même le but qu'il s'était proposé, et nous ne pouvons mieux faire que de lui emprunter ses propres paroles.

« On jugera peut-être que je n'ai pas donné le même développement aux diverses questions qui se rapportent à ces grandes théories; mais le plan que je me suis tracé comporte de telles inégalités, et je reconnais volontiers que j'ai pu accorder quelque préférence aux problèmes qui ont été plus spécialement l'objet de mes propres travaux.

» C'est ainsi que j'ai présenté avec des détails étendus la théorie si ardue des substitutions, sur laquelle j'avais publié antérieurement plusieurs Mémoires. Mais, en reproduisant, dans l'*Algèbre supérieure*, les résultats que j'avais obtenus, j'ai pu les compléter et en même temps les établir par des démonstrations plus simples et plus élégantes.

» J'ai cru utile de reproduire aussi intégralement cette partie importante de la théorie des congruences qui a été de ma part l'objet d'un travail présenté à l'Académie au mois de décembre dernier, et imprimé dans le tome XXXV du recueil de nos Mémoires (*).

» Mais le désir de développer mes recherches sur l'analyse algébrique ne m'a pas fait perdre de vue l'obligation que je m'étais imposée de présenter un ensemble complet des résultats acquis à la science dans les limites que je m'étais fixées; j'ai l'espoir d'y avoir réussi.

» Les recherches qui ont été entreprises dans ces dernières années sur la résolution algébrique des équations ont pour fon-

---

(*) *Mémoire sur la théorie des congruences suivant un module premier et suivant une fonction modulaire irréductible*. In-4 de IV-72 pages. Paris, 1866.

dements les travaux d'Abel et de Galois. Dans la précédente édition de mon ouvrage, je m'étais borné à faire connaître une démonstration de l'un des théorèmes de Galois, due à notre illustre confrère, M. Hermite; on trouvera dans le volume que je présente aujourd'hui un exposé complet de la remarquable méthode de Galois, avec les conséquences principales que ce grand géomètre en a tirées.

» L'ouvrage que je viens de terminer est le résultat d'un long travail. J'espère qu'il ne sera pas sans quelque utilité pour la science, et je le soumets avec confiance au jugement des géomètres (*). »

Nous pourrions ajouter bien d'autres indications et signaler, en particulier, un beau théorème sur l'ordre de multiplicité d'un système de solutions communes à plusieurs équations, mais le lecteur saura bien trouver tout cela lui-même. Louons, en terminant, l'ordre et la clarté des démonstrations, ainsi que la pureté et la correction du style : on sent que M. Serret est de la bonne école, qu'il a le respect de lui-même et du public, tandis que certains auteurs en prennent là-dessus bien à leur aise. Les exemples ne manqueraient pas....

Mais ne confondons point, par trop approfondir,
Leurs affaires avec les *nôtres*.

XX.

SERRET (J.-A.). — *Mémoire sur la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation.* — Paris; 1866. In-4° de IV-32 pages. (Extrait du tome XXXV de l'Académie des Sciences.)

(*) Il est juste de louer l'exécution typographique, qui fait vraiment honneur à M. Gauthier-Villars, ainsi qu'à l'intelligent directeur de son imprimerie, M. P. Drosne.

XXI.

Schrön (L.), Directeur de l'Observatoire et Professeur à Iéna. — *Tables des Logarithmes à sept décimales,* pour les nombres depuis 1 jusqu'à 108 000, et pour les fonctions trigonométriques de dix secondes en dix secondes; précédées d'une Introduction par *M. J. Hoüel,* Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 6e édition stéréotypée; un beau volume grand in-8° jésus de 12-474 pages, 1866. — Prix : 7 francs.

Table d'interpolation, avec Introduction par *M. Hoüel,* même format, de IV-4-72 pages. Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 3 francs.

Dans ces Tables, un trait placé au-dessous du dernier chiffre d'un logarithme avertit que ce chiffre a été forcé, indication utile, par laquelle on peut juger si le logarithme est approché en plus ou en moins d'une demi-unité du dernier ordre. Les parties proportionnelles des différences tabulaires sont données pour les lignes trigonométriques comme pour les nombres avec une décimale. La Table d'interpolation sert d'ailleurs à abréger le calcul des parties proportionnelles.

Une introduction de M. Hoüel fait ressortir les avantages des Tables et en explique très-clairement l'usage.

Ces Tables, d'une belle exécution typographique, d'un format commode, d'un caractère très-lisible, ont déjà eu six éditions en Allemagne. Les avantages incontestables qu'elles présentent nous font espérer qu'elles n'auront pas moins de succès en France.

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 241);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

VI. *Cas particuliers; systèmes de coniques qui ont des contacts du premier ordre avec des courbes particulières.*

22. Les formules que nous avons trouvées comprennent, comme toute formule générale, tous les cas particuliers; mais elles ne donnent pas toujours les résultats qu'on désire. Dans un cas particulier un système peut se diviser en plusieurs systèmes partiels, dont on souhaite connaître *séparément* les caractéristiques. Une conique appartenant à un des systèmes partiels, appartient aussi au système général; elle y sera comprise plusieurs fois si elle résulte de la coïncidence de plusieurs coniques qui sont séparées ordinairement. On voit donc que *la caractéristique* μ *ou* ν *d'un système général est égale à la somme des caractéristiques* μ *ou* ν *des systèmes partiels, qui résultent d'un cas particulier de la division du grand système, respectivement multipliées par des coefficients entiers et positifs.*

Les parties précédentes de cet article en donnent déjà des exemples. Nous avons trouvé des formules, marquées partout par la lettre c ajoutée aux numéros des formules, où les courbes sont supposées générales d'un certain ordre, sans aucun point double ni de rebroussement, et d'autres, marquées par un a, qui sont applicables lorsque

les courbes sont douées de points singuliers. Si l'on emploie dans ce dernier cas une formule (c), la caractéristique trouvée comprendra, outre la caractéristique qui donnerait la formule correspondante (a), le double, le triple ou un multiple de la caractéristique de chacun des systèmes de coniques, dont un ou plusieurs contacts se réduisent à passer par des points singuliers.

Ordinairement les deux caractéristiques μ et ν d'un système partiel ont le même coefficient dans les formules du système général. Alors, comme les nombres λ et ϖ s'expriment linéairement au moyen des caractéristiques, ceux qui appartiennent au système partiel entreront dans ceux du grand système avec le même coefficient. *Si nous appelons r ce coefficient, et si nous désignons par q le nombre de coniques singulières du grand système qui coïncident dans une certaine conique singulière du système partiel, celle-ci a dans le nombre λ ou ϖ de ce dernier système un coefficient qu'on trouve en multipliant par $\frac{q}{r}$ celui qui appartient dans le nombre λ ou ϖ du grand système à chacune des coniques singulières qui y coïncident* (*).

Nous ferons usage de cette règle, applicable à beaucoup de questions, dans les cas où deux courbes données se touchent elles-mêmes.

23. Si nous désignons comme à l'ordinaire par $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ les conditions de toucher deux courbes,

$$N(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3)$$

(*) Nous avons supposé que les q coniques singulières du grand système sont d'une même espèce ou qu'elles ont au moins le même coefficient. Si cela n'a pas lieu, on doit prendre séparément celles qui ont un même coefficient.

sera le nombre des coniques qui satisfont à ces deux conditions et à trois autres Z_1, Z_2 et Z_3. Dans le cas où les courbes $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ se touchent en un point θ, deux coniques coïncident, dans chacune de celles qui touchent $C_{m,n}$ au point θ et satisfont en outre aux conditions Z_1, Z_2, Z_3. Donc, si nous désignons par $C_{m,n}\theta$ la condition de toucher la courbe $C_{m,n}$ en un point donné, et par $C_{m,n} - C_{m',n'}$ celles de toucher en des points différents les courbes $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui se touchent elles-mêmes, nous aurons

$$(\text{I}) \left\{ \begin{array}{l} N(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3). \end{array} \right.$$

En particulier, $C_{m',n'}$ peut se réduire à un point p Alors l'équation (I) sera remplacée par

$$(\text{II}) \left\{ \begin{array}{l} N(C_{m,n},\ p,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - p,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \end{array} \right.$$

où $C_{m,n} - p$ représente les conditions de couper $C_{m,n}$ en un point donné et de toucher cette courbe en un point non donné. Dans le cas où $C_{m',n'}$ se réduira à une droite l, on aura

$$(\text{III}) \left\{ \begin{array}{l} N(C_{m,n},\ l,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - l,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3). \end{array} \right.$$

Dans le cas où $C_{m,n}$ *et* $C_{m',n'}$ *se touchent, le système de coniques* $(C_{m,n}, C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$ *se divise en deux autres :* $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$ *et* $(C_{m,n} - C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$. En remplaçant dans l'équation (I) la condition Z_3 successivement par celle de passer par un point et par celle de toucher une droite, on voit que *chacune des deux caractéristiques du système général est la somme de la caractéristique homologue du premier système partiel multipliée par* 2 *et de celle du second système*. Le coefficient r dont nous avons

parlé dans le n° 22, aura donc pour le premier système la valeur 2, pour le second la valeur 1.

Lorsque les caractéristiques du système général sont connues, il suffit de s'occuper de l'un des systèmes partiels ; nous choisirons le dernier.

24. Les coniques singulières du système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$ sont des limites vers lesquelles tendent certaines coniques singulières du système général $(C_{m,n}, C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$, lorsque $C_{m',n'}$ approche d'être tangente à $C_{m,n}$. Les coniques infiniment aplaties du système général dont les limites appartiennent au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, doivent, en général,

Ou passer par et être limitées à l'un des deux points d'intersection de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui tendent à coïncider avec le point de contact,

Ou être contenues sur une des tangentes communes de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui tendent à coïncider avec la tangente menée par le point de contact donné.

Dans le premier cas elles coïncident deux à deux avec des coniques infiniment aplaties passant par θ et limitées à θ, qui appartiennent toutes au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$. Chacune de ces coniques singulières représentera donc deux coniques infiniment aplaties du système général, et le nombre q du n° 22 sera égal à 2. Or, selon le n° 23, le nombre r est aussi égal à 2. Il faut donc compter dans le nombre λ du système partiel une de ces coniques infiniment aplaties *autant de fois* que l'on compte chacune des deux qui y coïncident, dans le nombre du système général. Les propositions du n° 12 donneront donc les suivantes :

Dans le nombre λ *du système* $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$ *il faut compter :*

Une fois, *toute conique infiniment aplatie joignant le point de contact donné* θ *à un point d'intersection de* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *et limitée à ces points ;*

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie passant par* θ *et limitée à* θ, *tangente à l'une et limitée par l'autre des courbes* C_{m_1, n_1} *et* C_{m_2, n_2}.

Les coniques infiniment aplaties du système

$$(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2)$$

renfermées dans une des deux tangentes communes à $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui coïncident avec la tangente de contact, ne donneront pas seulement des coniques singulières du système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, mais aussi des coniques singulières du système $(C_{m,n} - C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$; car une conique infiniment aplatie renfermée dans la tangente de contact de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ peut être regardée ou comme la limite d'une conique ordinaire dont l'une des deux branches touche les deux courbes, ou comme la limite d'une conique ordinaire dont les deux branches touchent respectivement les deux courbes. Dans le premier cas elle appartient au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, dans le second au système $(C_{m,n} - C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$. On ne pourra donc conclure combien de fois il faut compter ces coniques singulières dans le λ de chacun des systèmes.

On pourrait de la même manière discuter les coniques à point double; mais lorsque λ est trouvé, le principe de dualité donnera l'expression de ϖ dans les cas qui nous occuperont. Appliqué aux propositions que nous avons trouvées, relatives à deux espèces de coniques infiniment aplaties du système $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$, ce principe donne :

Dans le nombre ϖ *du système* $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$ *il faut compter :*

Une fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* $C_{m,n}$ *au point donné* θ *et d'une tangente commune à* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Deux fois, *toute conique ayant un point double à un des points où la tangente à $C_{m,n}$ au point θ rencontre l'une des courbes C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2}, et composée de cette tangente et d'une tangente menée par le point double à l'autre des deux courbes.*

25. Maintenant, pour le système

$$(C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2}),$$

on trouve

$$\lambda = 1 . m_1 m_2 + 2(n_1 m_2 + n_2 m_1) + x m_1 m_2$$

où x est un coefficient encore inconnu, et

$$\varpi = 1 . n_1 n_2 + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1) + x n_1 n_2,$$

ou en réduisant

$$\lambda = (1 + x) m_1 m_2 + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1),$$
$$\varpi = 2(m_1 n_2 + m_2 n_1) + (1 + x) n_1 n_2.$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° 1 (p. 241), on aura

$$\mu = \mu''' m_1 m_2 + \mu'' (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,$$
$$\nu = \nu''' m_1 m_2 + \nu'' (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2;$$

où

$$\mu''' = \nu' = \frac{2}{3}(1 + x), \quad \mu'' = \nu'' = 2, \quad \mu' = \nu''' = \frac{1}{3}(1 + x).$$

μ' et ν', μ'' et ν'', μ''' et ν''' sont les caractéristiques des trois systèmes, lorsque C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2} sont remplacées par des points et par des droites. Par conséquent,

$$\mu'' = N(C_{m,n}\theta,\ p_1,\ p_2,\ l) = \nu',$$

d'où

$$1 + x = 3,$$
$$x = 2\ (*).$$

(*) On pourrait trouver x par la remarque que ce nombre doit être entier, $\geqq 0$ et $\leqq 4$ (n° 24), et que $\mu''' = \frac{2}{3}(1 + x)$ doit être entier.

On trouve, en substituant cette valeur,

$$(8)\quad \begin{cases} (C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2}) \equiv [2m_1m_2 + 2(m_1n_2 + m_2n_1) + n_1n_2, \\ \qquad\qquad m_1m_2 + 2(m_1n_2 + m_2n_1) + 2n_1n_2], \\ (C_{m,n}\theta,\ p_1,\ p_2) \equiv (1,2), \\ (C_{m,n}\theta,\ p,\ l) \equiv (2,2), \\ (C_{m,n}\theta,\ l_1,\ l_2) \equiv (2,1). \end{cases}$$

26. Comme $x = 2$, nous aurons à ajouter aux théorèmes donnés dans le nº 25 :

Pour le système $(C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2})$ *il faut compter :*

Dans le nombre λ, deux fois *toute conique infiniment aplatie; tangente à la courbe* $C_{m,n}$ *au point* θ *et limitée par les deux autres courbes;*

Et dans le nombre ϖ, deux fois *toute conique ayant un point double en* θ *et composée de tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

Ces théorèmes et ceux du nº 24 sont encore vrais lorsque deux des trois courbes ou toutes les trois coïncident; ils sont donc applicables à la discussion des systèmes suivants :

$(2C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *deux contacts, l'un en un point donné, et avec* C_{m_1,n_1} *un contact simple;*

$(C_{m,n}\theta,\ 2C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *un contact en un point donné, et avec* C_{m_1,n_1} *deux contacts;*

$(3C_{m,n}\theta)$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *trois contacts, l'un en un point donné.*

Nous ne traiterons que le premier et le dernier de ces trois systèmes, parce que les caractéristiques du deuxième se trouvent sans difficulté au moyen des formules (4).

27. On trouve pour le système $(2 C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1})$

$$\lambda = 1 . m m_1 + 2 [n_1 (m-1) + (n-2) m_1] + 2 (m-2) m_1,$$
$$\varpi = 1 . n n_1 + 2 [m_1 (n-1) + (m-2) n_1] + 2 (n-2) n_1.$$

Par conséquent,

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1, \quad \nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1$$

où

$$(9\,a) \quad \begin{cases} \mu' = 2m + n - 4, \\ \mu'' = \nu' = 2(m + n - 3), \\ \nu'' = m + 2n - 4. \end{cases}$$

La signification de μ', μ'' et ν', ν'' s'exprime par les relations

$$(9\,b) \quad \begin{cases} (2 C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\ \nu'' m_1 + \nu' n_1), \\ (2 C_{m,n}\theta,\ p) \equiv (\mu',\ \nu'), \\ (2 C_{m,n}\theta,\ l) \equiv (\mu'',\ \nu''). \end{cases}$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on doit remplacer n par $m(m-1)$, conséquemment les formules $(9\,a)$ par

$$(9\,c) \quad \begin{cases} \mu' = m^2 + m - 4, \\ \mu'' = \nu' = 2(m^2 - 3), \\ \nu'' = 2m^2 - m - 4. \end{cases}$$

28. On trouve pour le système $(3 C_{m,n}\theta)$

$$\lambda = 1 . d + 2 (n-2)(m-3) + 2 \frac{(m-2)(m-3)}{2},$$

$$\varpi = 1 . t + 2 (m-2)(n-3) + 2 \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Puis les formules (1) et (2) donnent, après une réduction au moyen des équations de M. Plücker,

$$(10\,a) \quad \begin{cases} \mu = (m-2)(m + 2n - 9) + t, \\ \nu = (n-2)(2m + n - 9) + d; \end{cases}$$

$$(10\,b) \quad (3 C_{m,n}\theta) \equiv (\mu,\ \nu).$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on peut remplacer n par $m(m-1)$, d par o et t par $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$, conséquemment (10 a) par

$$(10\,c)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(m-2)(m^3+4m^2-11m-18),\\ \nu &= (m-2)(m+1)(m^2+m-9). \end{aligned}\right.$$

Pour $m=2$, on trouve

$$\mu=\nu=0,$$

pour $m=3$, $\mu=6$, $\nu=12$ (*).

(*La suite prochainement.*)

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES GAUCHES;

PAR M. HERMITE.

On donne dans l'enseignement un calcul un peu long pour déduire de la formule

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}$$

l'expression du carré de l'inverse du rayon de courbure au moyen des coordonnées x, y, z et de l'arc s, savoir :

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{ds^6}[(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2],$$

la variable indépendante étant quelconque. On peut l'abréger comme il suit.

(*) $(3C_3\theta)$ se divise en trois systèmes dont les caractéristiques sont 2 et 4 (*voir* la note du nº 20).

Soit pour un instant

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

et faisons

$$a' = a + da, \quad b' = b + db, \quad c' = c + dc,$$

l'angle de contingence $d\varphi$, sera donné par la formule relative au sinus, savoir :

$$\sin^2 d\varphi = (ab' - ba')^2 + (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2;$$

de sorte que l'on aura immédiatement $d\varphi^2$ en calculant les expressions $ab' - ba'$, etc. Or on trouve :

$$\begin{aligned} ab' - ba' &= a(b + db) - b(a + da), \\ &= a\,db - b\,da, \\ &= \frac{dx}{ds}\, d\, \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\, d\, \frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

et cette dernière expression donne lieu à la réduction suivante :

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2y\,ds - dy\,d^2s}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^2}$$
$$= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}.$$

On a donc par un calcul bien facile

$$ab' - ba' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3},$$

et semblablement

$$ac' - ca' = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3},$$

$$bc' - cb' = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3},$$

d'où suit comme on voit la formule annoncée.

THÉORÈMES RELATIFS AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. H. FAURE.

1. Considérons la fonction

$$(1)\qquad \varphi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \ldots + M\mu^2$$

des carrés des n variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$, et posons

$$(2)\qquad V_r = A\alpha_r\alpha + B\beta_r\beta + C\gamma_r\gamma + \ldots + M\mu_r\mu.$$

En donnant à r les n valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, on aura n relations semblables. Désignons par V_{rs} le résultat que l'on obtient en remplaçant dans V_r les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ respectivement par $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \ldots, \mu_s$, et supposons que $V_{rs} = 0$, lorsque les indices r et s sont différents entre eux.

Écrivons l'équation

$$(3)\qquad \varphi' = \sum a_{rs} V_r V_s = 0,$$

les coefficients a_{rs} étant des constantes quelconques, nulles lorsque les indices r et s sont égaux. Ces indices prenant les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, si l'on représente par $A', B', C', \ldots, M'$ les coefficients des variables α^2, $\beta^2, \ldots, \mu^2$ dans l'équation (3), on trouve

$$A' = A^2 \sum a_{rs}\alpha_r\alpha_s, \quad B' = B^2 \sum a_{rs}\beta_r\beta_s \ldots,$$

$$M' = M^2 \sum a_{rs}\mu_r\mu_s,$$

d'où

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \ldots + \frac{M'}{M} = \sum a_{rs}(A\alpha_r\alpha_s + B\beta_r\beta_s + \ldots M\mu_r\mu_s)$$
$$= \sum a_{rs} V_{rs} = o,$$

en ayant égard à l'hypothèse $V_{rs} = o$.

2. Désignons par V_{rr} le résultat que l'on obtient en remplaçant dans V_r les variables $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ par α_r, $\beta_r, \ldots, \mu_r$, et supposons $V_{rr} = o$.

Écrivons l'équation

$$(4) \qquad \varphi' = \sum a_r V_r^2 = o,$$

les coefficients a_r, b_r,..., étant des constantes.

Si l'on représente par $A', B', \ldots, M'$ les carrés des coefficients des variables $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ dans l'équation (4), on trouve

$$A' = A^2 \sum a_r \alpha_r^2, \quad B' = B^2 \sum a_r \beta_r^2, \ldots, \quad M' = M^2 \sum a_r \mu_r^2,$$

d'où

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \cdots + \frac{M'}{M} = \sum a_r(A\alpha_r^2 + B\beta_r^2 + \ldots + M\mu_r^2)$$
$$= \sum a_r V_{rr} = o.$$

en ayant égard à l'hypothèse $V_{rr} = o$.

3. *Applications géométriques.* — Soit

$$n = 3 \quad \text{et} \quad \varphi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

L'équation $\varphi = o$ représente une conique conjuguée à un triangle *abc* pris pour triangle de référence, α, β, γ étant les distances d'un point de la conique aux côtés de ce triangle.

L'équation $V_r = 0$ représente la polaire du point qui a pour coordonnées α_r, β_r, γ_r. En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, nous avons trois droites déterminant un triangle $a'b'c'$, et les conditions $V_{rs} = 0$ montrent que la conique φ est également conjuguée à ce triangle.

Comme d'ailleurs l'équation (3) est celle d'une conique circonscrite au triangle $a'b'c'$, nous avons ce théorème :

Théorème I. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à deux triangles abc, $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports que l'on obtient en divisant les coefficients des carrés des variables dans φ' par les coefficients de ces mêmes variables dans φ est nulle.*

D'après le n° 2, on voit que $V_r = 0$ est une tangente à la conique conjuguée φ, parce que $V_{rr} = 0$.

En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, nous avons trois tangentes à la conique φ déterminant un triangle $a'b'c'$.

La conique (4) étant conjuguée à ce triangle, nous avons ce théorème :

Théorème II. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à un triangle abc et inscrite dans un triangle $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' conjuguée au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports que l'on obtient en divisant les coefficients des carrés des variables dans φ' par les coefficients des carrés des mêmes variables dans φ est nulle.*

Si l'on a égard à la définition que nous avons donnée de la *caractéristique* d'un point (p. 9) par rapport à une conique, on pourra énoncer ces deux théorèmes comme il suit :

Théorème I. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à deux triangles abc, $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports*

que l'on obtient en divisant les caractéristiques des points a, b, c par rapport à φ', *par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à* φ, *est nulle.*

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une conique* φ *est conjuguée à un triangle abc et inscrite dans un triangle* $a'b'c'$, *si l'on conçoit une conique* φ' *conjuguée au triangle* $a'b'c'$, *la somme des rapports que l'on obtient, en divisant les caractéristiques des points a, b, c par rapport à* φ', *par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à* φ, *est nulle.*

Corollaires. — En désignant par π_r la caractéristique du point r par rapport à la conique φ, par π'_r la caractéristique de ce même point par rapport à la conique φ', nos deux théorèmes donnent

$$\text{(A)} \qquad \frac{\pi'_a}{\pi_a} + \frac{\pi'_b}{\pi_b} + \frac{\pi'_c}{\pi_c} = 0.$$

Ce qui suit est le développement de cette relation.

1° Le théorème I nous montre que si la conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$ passe par deux des sommets du triangle abc, par a et b par exemple (auquel cas $\pi'_a = \pi'_b = 0$), elle passera aussi par le sommet c, puisque d'après le théorème on a $\pi'_c = 0$. (CHASLES.)

La même considération appliquée au théorème II montre que

2° Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle $a'b'c'$ et conjuguée à un triangle abc, on peut circonscrire au triangle abc une conique conjuguée à $a'b'c'$.

Les polaires réciproques donnent cet autre théorème.

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle $a'b'c'$ et conjuguée à un triangle abc, on peut inscrire dans ce triangle une conique conjuguée à $a'b'c'$.

On sait qu'une hyperbole équilatère est conjuguée au

triangle qui a pour sommets les points à l'infini sur un cercle et le centre de l'hyperbole. Les théorèmes ci-dessus donnent alors les suivants :

Lorsqu'une hyperbole équilatère est inscrite dans un triangle, le cercle conjugué à ce triangle passe par le centre de l'hyperbole.

Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, la conique conjuguée à ce triangle qui a pour foyer le centre de l'hyperbole est une parabole.

Dans les théorèmes généraux exprimés par l'équation (A), la conique φ' peut représenter deux droites conjuguées à la conique φ. Dans ce cas la caractéristique π'_a doit être remplacée par le produit des distances du point a aux deux droites. On a par conséquent ce théorème :

3° Une conique φ étant conjuguée à un triangle abc, si l'on désigne par d_r, d'_r les distances d'un point r à deux droites conjuguées à la conique φ, on a

$$\frac{d_a d'_a}{\pi_a} + \frac{d_b d'_b}{\pi_b} + \frac{d_c d'_c}{\pi_c} = 0.$$

Si les deux droites conjuguées coïncident, elles se confondent avec une tangente à la conique, donc

4° Une conique φ étant conjuguée à un triangle abc, si l'on désigne par d_a, d_b, d_c les distances de ses sommets à une tangente de φ, on a

$$\frac{d_a^2}{\pi_a} + \frac{d_b^2}{\pi_b} + \frac{d_c^2}{\pi_c} = 0.$$

Par les sommets du triangle $a'b'c'$, menons une conique touchant les deux côtés ab, ac du triangle abc, et désignons par b_1, c_1 les points de contact sur ces côtés respectivement; la relation (A) devient

$$\frac{1}{\pi_a} + \frac{1}{\pi_b} \cdot \frac{\overline{bb_1}^2}{\overline{ab_1}^2} + \frac{1}{\pi_c} \cdot \frac{\overline{cc_1}^2}{\overline{ac_1}^2} = 0.$$

Cette condition, d'après le théorème précédent, signifie que la droite $b_1 c_1$ touche la conique φ, donc, d'après le théorème I,

5° Une conique φ étant conjuguée à un triangle $a'b'c'$, si par les sommets de ce triangle on mène une conique touchant deux droites conjuguées à φ, la corde de contact touchera la conique.

Comme cas particuliers, il résulte que

Si par le centre d'une hyperbole équilatère on mène un cercle touchant deux droites conjuguées à l'hyperbole, la corde de contact touchera l'hyperbole.

Une hyperbole équilatère étant conjuguée à un triangle, si par des sommets on mène une conique ayant pour foyer le centre de l'hyperbole, la directrice correspondante touchera l'hyperbole.

La théorie des polaires réciproques donne ce théorème :

6° Une conique φ étant conjuguée à un triangle $a'b'c'$, si l'on inscrit dans ce triangle une conique φ' passant par deux points a, b conjugués à la conique φ, les tangentes à la conique φ' menées par les points a et b se couperont sur la conique φ.

Si les points a, b sont à l'infini sur un cercle, on voit que

Lorsqu'une hyperbole équilatère est conjuguée à un triangle, les centres des cercles inscrits à ce triangle sont sur l'hyperbole.

D'après le théorème II on arrive, par des considérations analogues, aux suivants :

7° Une conique φ étant inscrite dans un triangle $a'b'c'$, si l'on mène une conique conjuguée $a'b'c'$ et touchant deux droites conjuguées à φ, la corde de contact touchera la conique φ.

8° Une conique φ étant circonscrite à un triangle $a'b'c'$, si l'on mène une conique φ' conjuguée à $a'b'c'$ par deux

points a, b conjugués à la conique φ, les tangentes à la conique φ' menées par les points a et b se couperont sur φ.

Si les points b', c' sont à l'infini sur un cercle, nous trouvons que

Lorsqu'une parabole φ a pour foyer le centre d'une hyperbole équilatère, si l'on mène à l'hyperbole deux tangentes qui soient conjuguées à la parabole, la corde de contact touchera la parabole.

Lorsqu'un cercle passe par le centre d'une hyperbole équilatère, les tangentes menées d'un point du cercle à l'hyperbole rencontrent cette courbe en deux points conjugués par rapport au cercle.

Lorsqu'une conique φ est conjuguée à un triangle abc, la caractéristique de l'un des sommets a est égal au rapport $\frac{abc}{obc}$, en désignant par o le centre de la conique.

Deux coniques φ et φ' sont conjuguées à un même triangle abc déterminé par les points d'intersection des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère inscrit dans les deux coniques ; donc, en ayant égard à l'observation précédente et au théorème I,

9° Deux coniques ayant pour centres les points o et o', si l'on peut inscrire dans la conique o' un triangle conjugué à la conique o, on aura la relation

$$\frac{obc}{o'bc} + \frac{oca}{o'ca} + \frac{oab}{o'ab} = 0,$$

dans laquelle a, b, c sont les points qui ont la même polaire dans les deux coniques.

D'après le théorème II, on voit que cette même relation existera si l'on peut circonscrire à la conique o un triangle conjugué à la conique o'.

Si l'on désigne par α, β, γ les distances du centre o aux

côtés du triangle abc par α', β', γ' les distances du centre o' aux côtés du même triangle, ce théorème donne

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 0.$$

Supposons que les coniques o et o' se touchent au point a, les points a et b venant coïncider, la relation ci-dessus devient

$$\frac{2\alpha}{\alpha'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 0.$$

Or, en général, si P représente le produit des carrés des demi-axes principaux d'une conique conjuguée à un triangle, R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$P = 2R\alpha\beta\gamma$$

pour la conique o (question 560), et

$$P' = 2R\alpha'\beta'\gamma';$$

dans le cas où les coniques se touchent

$$\frac{P}{P'} = \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha'^2\gamma'}.$$

D'autre part, si ρ est le rayon de courbure de la conique o au point de contact a, ρ' le rayon de courbure de la conique o' au même point, on a

$$P = \rho\alpha^3, \quad P' = \rho'\alpha'^3 \quad \text{et} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\rho\alpha^3}{\rho'\alpha'^3}.$$

L'égalité des rapports $\frac{P}{P'}$ donne

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\rho\alpha}{\rho'\alpha'},$$

donc, en vertu du théorème précédent,

$$2\rho' + \rho = 0.$$

Lorsque deux coniques o et o' se touchent, si l'on peut inscrire dans la conique o' un triangle conjugué à o (ou circonscrire à o un triangle conjugué à o'), le rayon de courbure de la conique o au point de contact sera le double de celui de la conique o' au même point et dirigé en sens contraire.

Désignons par a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 les points d'intersection de la conique φ avec les côtés du triangle respectivement opposés aux sommets a, b, c, soient A, B, C les demi-diamètres de φ parallèles à ces mêmes côtés. Ajoutant un accent à ce qui est relatif à la conique φ', la relation (A) devient

$$\frac{ab'_1 \,.\, ab'_2}{ab_1 \,.\, ab_2}\,\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{B}'^2} + \frac{ba'_1 \,.\, ba'_2}{ba_1 \,.\, ba_2}\,\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}'^2} + \frac{\pi'_c}{\pi_c} = 0$$

en laissant subsister le dernier terme tel qu'il est.

Supposons que le triangle abc ait son côté ab à l'infini, de sorte que c devienne le centre de la conique φ, ca, cb deux de ses diamètres conjugués. La relation précédente se réduit à

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}'^2} + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{B}'^2} = \pi'_c$$

en remarquant que $\pi_c = -1$.

Les théorèmes I et II donnent cet énoncé.

10° Etant données deux coniques φ et φ', cette dernière étant circonscrite à un triangle conjugué à φ (ou conjuguée à un triangle circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B deux demi-diamètres conjugués de φ, par A', B' les demi-diamètres de φ' parallèles aux premiers, on a la relation précédente dans laquelle π'_c est la caractéristique du centre de φ par rapport à φ'.

Si φ est un cercle on a ces théorèmes :

11° La somme des carrés des inverses des demi-axes

principaux d'une conique φ' circonscrite à un triangle (ou conjuguée à un triangle) est égale à la caractéristique du centre du cercle conjugué au triangle (ou du centre d'un cercle inscrit au triangle), par rapport à φ' divisé par le carré du rayon du cercle.

Si au contraire φ' est un cercle, on a ces théorèmes :

12° La somme des carrés des demi-axes principaux d'une conique conjuguée à un triangle (ou inscrite dans un triangle) est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit (ou conjugué) au triangle.

Remarque. — Ces deux théorèmes ont été proposés en questions dans les *Nouvelles Annales*, nos 524 et 562. Le numéro de juin 1864 (p. 257) contient une solution de la question 562, mais quelques inexactitudes de l'auteur l'amènent à une erreur dans un coefficient numérique. Je ferai la même observation à l'égard de la question 561, dont l'énoncé modifié (1864, p. 253) est inexact. L'énoncé qui figure tome XX, 1re série, page 56, est exact.

Dans la relation (B) remplaçons π'_c par sa valeur, on aura

$$\frac{A^2}{A'^2}+\frac{B^2}{B'^2}=\frac{ca'_1 . ca'_2}{A'^2}, \qquad \frac{A^2}{A'^2}+\frac{B^2}{B'^2}=\frac{cb'_1 . cb'_2}{B'^2}.$$

Si l'on élimine A′ et B′ de ces deux relations, on a ces théorèmes :

13° Étant donnés une conique φ ayant pour centre le point c et deux de ses demi-diamètres conjugués A, B, si une conique φ', circonscrite à un triangle conjugué à φ (ou conjuguée à un triangle circonscrit à φ), rencontre ces deux diamètres respectivement aux points a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, on aura la relation

$$\text{(C)} \qquad \frac{A^2}{ca'_1 . ca'_2}+\frac{B^2}{cb'_1 . cb'_2}=1.$$

Si la conique φ est un cercle, on voit que : si par un point fixe c on trace deux droites rectangulaires rencontrant une conique, l'une aux points a_1, a_2, l'autre aux points b_1, b_2, on a la relation

$$\frac{1}{ca_1 . ca^2} + \frac{1}{cb_1 . cb_2} = \text{const.}$$

La valeur de la constante résulte du précédent théorème. Si c est le centre de la conique, on retrouve un théorème connu.

Lorsque dans la relation (B) on suppose que la conique φ' passe par le centre de φ, nous dirons que :

Lorsqu'une conique φ' passe par trois points conjugués à une conique φ (ou bien est conjuguée à un triangle circirconscrit à φ) et par son centre, si l'on désigne par A, B deux diamètres conjugués de φ et par A′, B′ les diamètres qui leur sont parallèles dans φ', on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} = 0.$$

Cette relation montre que si l'une des coniques est un cercle, l'autre est une hyperbole équilatère, ce qui donne quatre théorèmes plus ou moins connus.

La même relation (B) donne le théorème suivant :

Lorsqu'une conique φ' concentrique à une conique φ passe par trois points conjugués de celle-ci (ou est conjuguée à un triangle circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B deux diamètres conjugués de φ, par A′, B′ les diamètres de φ' de même direction que les premiers, on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} + 1 = 0.$$

La relation (C) donne :

Lorsqu'une conique φ' passe par les extrémités d'un

diamètre de la conique φ et trois points conjugués de celle-ci (ou est conjuguée à un triangle circonscrit à φ), elle rencontre le diamètre A conjugué au premier en deux points a_1, a_2 tels que

$$2\,ca_1\,ca_2 = A^2,$$

c étant le centre de φ, A la longueur du demi-diamètre.

4. Pour $n = 4$, on a deux théorèmes généraux analogues à ceux démontrés plus haut (p. 301) :

Théorèmes III et IV. — *Lorsqu'une surface φ du second ordre conjuguée à un tétraèdre abcd est conjuguée à un second tétraèdre $a'b'c'd'$ (ou inscrite dans ce tétraèdre), si l'on conçoit une surface φ' du même ordre circonscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$ (ou conjuguée à ce tétraèdre), la somme des quotients que l'on obtient, en divisant les caractéristiques des points a, b, c, d par rapport à φ', par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à φ, est nulle.*

En désignant par π_a, π'_a les caractéristiques du sommet a, par rapport aux surfaces φ et φ', nous écrirons donc

$$\sum \frac{\pi'_a}{\pi_a} = 0.$$

Nous nous bornons à énoncer les théorèmes déduits de cette relation, en suivant le même ordre que pour les coniques.

1° Toute surface du second ordre qui passe par sept des sommets de deux tétraèdres conjugués, passe par le huitième.

2° Toute surface du second ordre φ' conjuguée à un tétraèdre $a'b'c'd'$, circonscrit à une surface φ du second ordre, et qui passe par trois des sommets d'un tétraèdre conjugué à φ, passe par le quatrième sommet.

La théorie des polaires réciproques donne deux autres théorèmes :

3° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre *abcd*, si l'on désigne par p_a, p'_a les distances du sommet a à deux plans conjugués par rapport à φ, on a

$$\sum \frac{p_a p'_a}{\pi_a} = 0.$$

4° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre *abcd*, si l'on désigne par p_a la distance du sommet a à un plan tangent à φ, on a

$$\sum \frac{p_a^2}{\pi_a} = 0.$$

5° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre, si par les sommets de ce tétraèdre on conçoit une surface du second ordre touchant les arêtes d'un trièdre conjugué à φ, le plan passant par les points de contact touchera la surface φ.

6° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre, si l'on inscrit dans ce tétraèdre une surface du second ordre φ', tangente aux trois côtés d'un triangle conjugué à φ, les plans tangents à la surface φ' menée par les trois points de contact se couperont sur φ. (Réciproque du précédent.)

7° Une surface du second ordre φ étant inscrite dans un tétraèdre, si l'on conçoit une surface du second ordre φ', conjuguée à ce tétraèdre et touchant les arêtes d'un trièdre conjugué à φ, le plan passant par les points de contact touchera la surface φ.

8° Une surface du second ordre φ étant circonscrite à un tétraèdre, si l'on conçoit une surface du second ordre φ' conjuguée à ce tétraèdre et touchant les côtés d'un triangle conjugué à φ, les plans tangents aux points de contact menés à la surface φ' se couperont sur φ.

9° Deux surfaces du second ordre étant données, si l'on désigne par α, β, γ, δ les distances du centre de l'une d'elles φ aux faces du tétraèdre conjugué à la fois aux deux surfaces, par α', β', γ', δ' les distances du centre de la seconde φ' à ces mêmes plans, on pourra inscrire dans la surface φ' un tétraèdre conjugué à φ, si l'on a la relation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\delta}{\delta'} = 0.$$

Cette même relation aura lieu si l'on peut circonscrire à φ un tétraèdre conjugué à φ'.

10° Étant données deux surfaces du second ordre φ et φ', cette dernière étant circonscrite à un tétraèdre conjugué à φ (ou conjugué à un tétraèdre circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B, C trois demi-diamètres conjugués de φ, par A', B', C' les demi-diamètres de φ' parallèles aux premiers, on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} + \frac{C^2}{C'^2} = \pi'_d,$$

dans laquelle π'_d est la caractéristique du centre d de φ par rapport à φ'.

Si φ est une sphère on a ces théorèmes :

11° La somme des carrés des inverses des demi-axes principaux (ou de trois demi-diamètres rectangulaires) d'une surface φ' circonscrite à un tétraèdre (ou conjuguée à ce tétraèdre) est égale à la caractéristique du centre de la sphère conjuguée au tétraèdre (ou du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre) par rapport à φ' divisé par le carré du rayon de la sphère (*).

Si, au contraire, φ' est une sphère :

(*) Ce théorème revient à celui donné par M. Painvin dans la question 760, que M. Faure ne connaissait pas quand il nous a envoyé son article au mois de novembre dernier. P.

12° La somme des carrés des demi-axes principaux d'une surface du second degré conjuguée à un tétraèdre (ou inscrite dans un tétraèdre) est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite (ou conjuguée) au tétraèdre.

Remarque. — Un tétraèdre n'a pas en général de sphère conjuguée, il faut pour cela que ses arêtes opposées soient rectangulaires; le point de rencontre de ses hauteurs est le centre de la sphère conjuguée. Les théorèmes dans lesquels figurent une sphère conjuguée sont donc relatifs à un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent.

13° Étant donnés une surface du second ordre φ ayant pour centre le point d et trois de ses demi-diamètres conjugués A, B, C, si une surface du second ordre φ' circonscrite à un tétraèdre conjugué à φ (ou conjuguée à un tétraèdre circonscrit à φ) rencontre ces diamètres respectivement aux points a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, on a la relation

$$\frac{A^2}{da_1 . da_2} + \frac{B^2}{db_1 . db_2} + \frac{C^2}{dc_1 . dc_2} = 1.$$

Il serait facile de multiplier davantage ces applications de nos deux théorèmes généraux; ce qui précède suffit pour montrer le parti que l'on peut en tirer.

CONSTRUCTION GRAPHIQUE

de la courbe gauche du troisième ordre qui passe par six points donnés dans l'espace;

Par M. POUDRA.

Soient a, b, c, d, e, f les six points donnés dans l'espace. Prenons pour plan de construction celui qui passe

par les trois points a, b, c. Soient d^h, e^h les projections des points d et e de l'espace, sur ce plan abc.

Rabattons ces points d et e de l'espace sur le plan abc en faisant tourner les verticales projetantes dd^h, ee^h autour de leurs traces respectives d^h, e^h dans une même direction, et soient, sur la figure, d_1, e_1, ces points rabattus.

Considérons le point d comme le sommet d'un cône du second degré passant par les cinq points a, b, c, e, f, et dont la base sur le plan abc sera une section conique *abcmog*. Regardons de même le point e comme le sommet d'un second cône passant par les cinq points a, b, c, d, f : il aura pour base, sur le plan abc, une conique *abchpm* facile à déterminer.

Ces deux cônes ont une arête commune de; leur intersection est alors une courbe du troisième ordre qui passera par les six points donnés. C'est cette courbe qu'il s'agit de construire simplement.

Par l'arête de, commune aux deux cônes, menons un plan quelconque : il coupera le plan abc suivant une droite telle que mgh, qui passera toujours par le point m quatrième intersection des deux bases, point m par lequel passe l'arête commune de. Cette droite mgh rencontrera en g la base du premier cône, et en h celle du second ; et alors les droites dg, eh représenteront les arêtes des deux cônes qui sont dans le même plan ; leur point d'intersection i sera donc un point de la courbe, mais rabattu. En continuant cette opération par une suite de plans coupants, on obtiendra autant de points de la courbe qu'on le désirera.

Si du point d_1 on mène les deux droites doj, dkq, tangentes à la base *abcymo* du cône dont ce point d_1 est le sommet rabattu, ce seront les limites des arêtes de ce cône, et la courbe cherchée et rabattue doit donc être tangente à

ces deux droites. On obtiendra facilement les points de tangence : ainsi pour la tangente $d_1 o$, on trace la droite *mor*, qui rencontre la seconde base *abchpm* au point *r*, et ce point joint à e_1 donne la droite $re_1 j$, laquelle représente l'arête du second cône qui se trouve dans le même plan que la base *omr* du premier. Le point *j* d'intersection de ces deux arêtes sera le point de tangence de la droite $d_1 oj$ et de la courbe. On trouvera de même le point *k*. En agissant de la même manière pour les tangentes $e_1 l$, $e_1 p$, on trouvera les points *l* et *n*, où ces droites sont tangentes à la courbe.

On obtiendra la tangente à la courbe en un point quelconque *i* en menant les deux arêtes *dgi*, *ehi*, qui déterminent sur les bases respectives les points *g* et *h* ; les tangentes en ces points se rencontreront en un point qui, joint à *i*, donnera la tangente cherchée.

On trouvera facilement les asymptotes de la courbe gauche ; il suffit de déterminer dans les deux cônes les couples d'arêtes parallèles et mener (comme ci-dessus pour la tangente au point *i*) les deux tangentes aux bases respectives passant par les traces de ces arêtes, alors par le point d'intersection de ces deux tangentes menant une parallèle aux couples d'arêtes ce sera une tangente à leur point d'intersection, qui est à l'infini ; ce sera donc une asymptote de la courbe. Une des couples d'arêtes parallèles est la droite *dem* ; il peut y en avoir trois autres, dont deux peuvent être imaginaires.

Tous les résultats obtenus par ces constructions sont tracés sur le plan *abc* et représentent les constructions de l'espace rabattues sur ce plan ; en relevant tous les points on obtiendra donc la courbe gauche dans l'espace, et les pieds des verticales donneront la projection de cette courbe sur ce plan *abc*.

SUR LE VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE ET SUR UN THÉORÈME DE STEINER;

Par M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

Soit ABCD un tétraèdre; désignons par AH et AH′ les perpendiculaires abaissées du point A sur la face BCD et sur C′D′ projection de CD sur un plan mené par A perpendiculairement à AB.

AH est la hauteur du tétraèdre; AH′ la distance des arêtes opposées AB, CD. Soit δ l'angle aigu que forme le plan de la face BCD et le plan mené par A perpendiculairement à AB; c'est aussi l'angle des droites AB, AH.

V désignant le volume, on a

$$V = \frac{1}{3} AH \times BCD, \qquad AC'D' = BCD \cos\delta,$$

$$AH = AB \cos\delta, \quad AC'D' = \frac{1}{2} AH' \times C'D';$$

d'où

$$V = \frac{1}{6} AB \times AH' \times C'D'.$$

Mais $C'D' = CD \cos\mu$, μ désignant l'angle aigu que forment les droites C′D′, CD. Or μ est le complément de l'angle aigu que forment les arêtes opposées CD, AB, et on a

$$V = \frac{1}{6} \times AB \times CD \times AH' \times \sin\left(\widehat{AB.CD}\right).$$

Théorème. — *Le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de deux arêtes opposées multiplié*

par le produit de leur distance mutuelle et du sinus de l'angle qu'elles forment.

THÉORÈME DE STEINER. — *Soient deux droites* P, Q, *non situées dans le même plan; si deux points* A, B *se meuvent sur* P *en conservant leur distance, que deux points* C, D *se meuvent sur* Q, *en conservant leur distance, tous les tétraèdres ayant pour sommets ces quatre points mobiles, sont équivalents.*

THÉORÈME SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. A. SARTIAUX,
Élève de l'École Polytechnique.

M. Beltrami a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (question 663, t. II, 2e série, p. 336) le théorème suivant :

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.

On peut généraliser ce résultat et énoncer le théorème suivant :

Les points divisant les vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque dans le rapport des distances de ces centres à un plan fixe sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.

En effet, les centres des sphères inscrites sont définis

par les égalités

$$x=y=z=t, \qquad x=y=z=-t,$$
$$x=y=-z=-t, \qquad x=-y=-z=-t,$$
$$x=y=-z=t, \qquad x=-y=-z=t,$$
$$x=-y=z=t, \qquad x=-y=z=-t.$$

Nous prenons le tétraèdre donné comme tétraèdre de référence.

Soient

$$x=y=z=t, \quad x'=y'=z'=-t',$$

deux des centres, et soit

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t=0,$$

le plan fixe.

Soient p et p' les distances des deux centres au plan, on a

$$p=\mathrm{K}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x, \quad x=y=z=t,$$
$$p'=\mathrm{K}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x', \quad x'=y'=z'=-t',$$

et posant $\lambda=\dfrac{1}{\mathrm{K}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{p}+\frac{x'}{p'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}+\frac{y'}{p'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{p}+\frac{z'}{p'}\right)=\lambda(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p}+\frac{t'}{p'}\right)=-\lambda\delta,$$

le point

$$\mathrm{X}'=\mathrm{Y}'=\mathrm{Z}'=\mu.\lambda(\alpha+\beta+\delta), \quad \mathrm{T}'=-\mu.\lambda\delta$$

est évidemment sur la surface dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{t}=0,$$

car les valeurs de X′, Y′, Z′, T′, peuvent s'écrire

$$X' = \frac{\mu}{2pp'}(p'x + px'), \quad Y' = \frac{\mu}{2pp'}(p'y + py'),$$

$$Z' = \frac{\mu}{2pp'}(p'z + pz'), \quad T' = \frac{\mu}{2pp'}(p't + pt').$$

Mais si A, B, C, D, V représentent les faces du tétraèdre et son volume, on a

$$AX' + BY' + CZ' + DT' = 3V,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{2pp'}[p'(Ax + By + Cz + Dt) + p(Ax' + By' + Cz' + Dt')] = 3V,$$

et comme

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V, \quad Ax' + By' + Cz' + Dt' = 3V,$$

$$\mu = \frac{2pp'}{p + p'},$$

par suite,

$$X' = \frac{p'x + px}{p + p'}, \quad Y' = \frac{p'y + py'}{p + p'},$$

$$Z' = \frac{p'z + pz'}{p + p'}, \quad T' = \frac{p't + pt'}{p + p'}:$$

ce sont précisément les coordonnées du point divisant la distance des deux centres dans le rapport de leurs distances au plan fixe. Ainsi si le plan fixe a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0,$$

la surface du troisième ordre a pour équation

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

elle contient évidemment les arêtes du tétraèdre et est la

surface inverse du plan fixe. Lorsque le plan fixe est le plan à l'infini on a le théorème de M. Beltrami.

Les quatre sommets sont des points doubles de la surface. Si l'on prolonge jusqu'au plan des trois autres les droites joignant un point double à un point de la surface, les pieds de ces quatre droites pris par groupes de trois déterminent quatre plans passant respectivement par un point fixe. Ces points fixes sont les points communs aux cônes tangents aux points doubles pris trois à trois. Ces cônes se coupent trois à trois en un seul point distinct des points doubles.

Pour une position d'un point de la surface ces quatre plans forment un tétraèdre dont les sommets sont les faces du tétraèdre des points doubles. Ces deux tétraèdres sont homologiques et le point de la surface est le centre d'homologie.

Cette surface est en même temps le lieu des points tels que les pieds des parallèles à quatre directions fixes arrêtées aux faces d'un tétraèdre soient dans un même plan. Nous pouvons prendre les distances aux faces comptées sur ces directions comme coordonnées d'un point. Exprimer que les pieds de ces quatre droites sont dans un même plan revient à dire que la somme algébrique des volumes des tétraèdres obtenus en prenant les coordonnées du point trois à trois est nulle. L'équation qui traduit cette condition est

$$\mathrm{YZT}\sin\widehat{\mathrm{YZT}} + \mathrm{XZT}\sin\widehat{\mathrm{XZT}} + \mathrm{XYT}\sin\widehat{\mathrm{XYT}} + \mathrm{XYZ}\sin\widehat{\mathrm{XYZ}} = 0.$$

Si l'on revient au système de coordonnées perpendiculaires aux faces du tétraèdre, l'équation prend la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

ce qui démontre la propriété. Ce sont des propriétés tout à fait analogues à celles des coniques circonscrites à un triangle. Nous avons vu que la surface passe par les arêtes du tétraèdre. Si l'on appelle R, R' les rayons de courbure aux deux points formant avec deux sommets un système harmonique, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

Les arêtes du tétraèdre appartiennent à la ligne parabolique de la surface.

CONSTRUCTION (*)

des centres des circonférences tangentes à trois circonférences données et des centres des sphères tangentes à quatre sphères données ;

Par M. E. STÉPHAN.

Théorème I. — *Si l'on augmente ou si l'on diminue d'une même quantité variable les rayons de trois circonférences* C_1, C_2, C_3, *leur centre radical décrit une ligne droite* $O_1 O_2$.

La droite $O_1 O_2$ passe par les centres O_1, O_2 des deux circonférences tangentes, l'une intérieurement, l'autre extérieurement aux trois circonférences C_1, C_2, C_3. Il résulte de là que :

Pour trouver les centres O_1, O_2, *il suffit de déterminer les points de la droite* $O_1 O_2$ *qui sont à égale distance de deux des trois cercles* C_1, C_2, C_3.

Ce dernier problème peut être énoncé plus généralement sous la forme suivante :

(*) Extrait du *Bulletin de la Société Philomathique*, p. 133 ; 1865.

Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une courbe du second degré : or, on sait résoudre cette question dans tous les cas, par plusieurs procédés simples, avec la règle et le compas.

Si l'on augmente le rayon de l'une des circonférences, de C_1 par exemple, d'une certaine quantité et que l'on diminue en même temps les rayons des deux autres C_2, C_3 de la même quantité, ou inversement, le centre radical décrit une autre droite qui passe par les centres des circonférences tangentes extérieurement à C_1 et intérieurement à C_2 et C_3 ou inversement.

En résumé : *Il existe quatre droites, faciles à construire, sur lesquelles sont situés par couples les centres des huit circonférences qui, dans le cas le plus général, répondent à la question proposée* (*).

THÉORÈME II. — *La droite* $O_1 O_2$ *est perpendiculaire à l'axe de similitude des circonférences* C_1, C_2, C_3.

Cette propriété, connue de Gergonne, ressort aussi d'un travail de M. Mannheim sur le lieu des centres des circonférences qui coupent trois circonférences données sous le même angle.

Ce qui précède peut être répété textuellement pour quatre sphères.

THÉORÈME III. — *Quand on augmente ou quand on diminue d'une même quantité variable les rayons de quatre sphères* S_1, S_2, S_3, S_4, *leur centre radical décrit une droite* $O_1 O_2$.

La droite $O_1 O_2$ passe par les centres O_1, O_2 des deux sphères tangentes, l'une intérieurement, l'autre extérieurement aux quatre sphères S_1, S_2, S_3, S_4. Il résulte de

---

(*) Pour la question analogue relative aux petits cercles de la sphère, consulter un excellent Mémoire de M. Heegmann, dans le *Recueil de la Société de Lille*; 1826. P.

là que : *Pour trouver les centres* O_1, O_2, *il suffit de déterminer les points de la droite* $O_1 O_2$ *qui sont à égale distance de deux des quatre sphères données.*

Cette question se résout à peu près de la même manière que la question de Géométrie plane qui lui correspond.

Les centres des seize sphères qui, dans le cas général, répondent à la question, sont situés par couples sur huit droites analogues à $O_1 O_2$.

On sait que les plans radicaux de trois sphères, de S_1, S_2, S_3 par exemple, se coupent suivant une même droite (D_4) appelée axe radical des sphères.

Théorème IV. — *Si l'on augmente d'une même quantité variable les rayons des sphères* S_1, S_2, S_3, *la droite* (D_4) *décrit un plan* (P_4) *perpendiculaire à leur axe de similitude.*

Si l'on augmente d'une même quantité les quatre rayons, on a quatre plans analogues (P_1), (P_2), (P_3), (P_4).

Théorème V. — *Les plans* (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) *se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan de similitude des quatre sphères.*

C'est cette droite qui nous sert à effectuer notre construction.

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES ET LINÉAIRES.

La méthode d'Ampère pour la résolution des équations

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\dfrac{dy}{dx} + B\dfrac{dz}{dx} + Cy + Dz = E, \\ A'\dfrac{dy}{dx} + B'\dfrac{dz}{dx} + C'y + D'z = E' \end{array} \right.$$

exige que l'on ramène ces deux équations à deux autres dont l'une ne contienne que $\frac{dy}{dx}$, et l'autre que $\frac{dz}{dx}$. On peut éviter cette opération préalable en procédant de la manière suivante.

Je suppose en premier lieu que les coefficients A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ soient constants. J'ajoute les deux équations (I) après les avoir multipliées respectivement par 1 et par la constante θ. J'obtiens ainsi

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[(A + A'\theta)y + (B + B'\theta)z\right] \\ &\qquad + (C + C'\theta)y + (D + D'\theta)z = E + E'\theta. \end{aligned} \right.$$

Je pose

$$(2)\qquad (A + A'\theta)y + (B + B'\theta)z = u,$$

$$(3)\qquad \frac{C + C'\theta}{A + A'\theta} = \frac{D + D'\theta}{B + B'\theta} = k;$$

et l'équation linéaire (1) se réduit à l'équation linéaire

$$(4)\qquad \frac{du}{dx} + ku = E + E'\theta.$$

De la première des équations (3) on tire deux valeurs constantes (θ_1, θ_2) de l'inconnue θ. Soient u_1 et u_2 les valeurs correspondantes de u, obtenues en intégrant l'équation (4). On aura

$$(A + A'\theta_1)y + (B + B'\theta_1)z = u_1,$$
$$(A + A'\theta_2)y + (B + B'\theta_2)z = u_2,$$

d'où l'on déduira les valeurs des fonctions inconnues y et z.

Quand les coefficients des premiers membres des équations (1) sont des fonctions de x, on procède d'une façon

analogue, mais en considérant θ comme une fonction de x. Dans ce cas le premier membre de l'équation (1) doit être diminué de

$$\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA'}{dx}\theta + A'\frac{d\theta}{dx}\right)y + \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB'}{dx}\theta + B'\frac{d\theta}{dx}\right)z$$

termes qu'il a fallu ajouter pour compléter la dérivée de $(A + A'\theta)y + (B + B'\theta)z$ ou de u. L'équation qui donne les valeurs de θ est alors

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{C + C'\theta - \dfrac{dA}{dx} - \dfrac{dA'}{dx}\theta - A\dfrac{d\theta}{dx}}{A + A'\theta} \\ = \dfrac{D + D'\theta - \dfrac{dB}{dx} - \dfrac{dB'}{dx}\theta - B'\dfrac{d\theta}{dx}}{B + B'\theta}. \end{array}\right.$$

Cette équation est du premier ordre, mais non linéaire. Quand on saura l'intégrer, on aura deux valeurs de θ en attribuant à la constante arbitraire deux valeurs distinctes, et le calcul s'achèvera comme plus haut. On simplifie l'équation (5) en supposant que A et A' sont deux constantes, ce qui est toujours permis.

La méthode précédente s'étend facilement au cas de trois équations simultanées. Nous n'examinerons que le cas où les coefficients seront constants. Soient

$$(1')\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dy}{dx} + B\dfrac{dz}{dx} + C\dfrac{dt}{dx} + Dy + Ez + Ft = G, \\ A'\dfrac{dy}{dx} + B'\dfrac{dz}{dx} + C'\dfrac{dt}{dx} + D'y + E'z + F't = G', \\ A''\dfrac{dy}{dx} + B''\dfrac{dz}{dx} + C''\dfrac{dt}{dx} + D''y + E''z + F''t = G''. \end{array}\right.$$

J'ajoute ces équations respectivement multipliées par les

constantes 1, θ, λ. J'aurai

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[(A + A'\theta + A''\lambda)y + (B + B'\lambda + B''\lambda)z \\ &\qquad\qquad + (C + C'\theta + C''\lambda)t] \\ &\quad + (D + D'\theta + D''\lambda)y + (E + E'\theta + E''\lambda)z \\ &\quad + (F + F'\theta + F''\lambda)t \\ &= G + G'\theta + G''\lambda. \end{aligned}\right.$$

Je pose

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} &(A + A'\theta + A''\lambda)y + (B + B'\theta + B''\lambda)z \\ &\qquad\qquad + (C + C'\theta + C''\lambda)t = u, \end{aligned}\right.$$

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{D + D'\theta + D''\lambda}{A + A'\theta + A''\lambda} = \frac{E + E'\theta + E''\lambda}{B + B'\theta + B''\lambda} \\ &\qquad\qquad = \frac{F + F'\theta + F''\lambda}{C + C'\theta + C''\lambda} = k, \end{aligned}\right.$$

et l'équation (1') se réduit à l'équation linéaire

$$(4')\qquad \frac{du}{dx} + ku = G + G'\theta + G''\lambda.$$

Les équations (3') donnent, tout calcul fait, trois valeurs de θ et trois valeurs correspondantes de λ. L'intégration de l'équation (4') donnera trois valeurs correspondantes de u. Si l'on substitue à θ, λ, u dans l'équation (2') tour à tour θ_1, λ_1, u_1; θ_2, λ_2, u_2; ϑ_3, λ_3, u_3, on aura trois équations pour déterminer les fonctions inconnues y, z, t.

On traiterait de la même manière des équations simultanées de la forme

$$A\frac{d^m y}{dx^m} + B\frac{d^m z}{dx^m} + Cy + Dz = E,$$

au moins quand A, B, C, D sont des constantes. P.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 558

(voir 1re série, tome XX, page 55);

PAR M. VIANT,

Étant données deux figures homographiques F, F′ *dans un même plan, soient* m, m', m'' *les points du plan homologues à eux-mêmes.*

1° *Si une conique est circonscrite au triangle* $mm'm''$, *il n'existe sur cette conique que deux points tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique soient toujours homologues dans les deux figures.*

2° *Si une conique est inscrite au triangle* $mm'm''$, *il n'existe que deux tangentes telles, qu'une droite roulant sur la conique coupe ces deux tangentes en deux points toujours homologues dans les deux figures.*

(P. LAFITTE.)

Dans tout système homographique le sommet d'un angle est homologue du sommet de l'angle des droites correspondantes.

Soit donc une conique $mm'm''\alpha\beta'$ circonscrite au triangle formé par les points doubles; soient α, β' deux points satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Pour cela, il faut et il suffit que α et β' soient des points homologues. Cette condition est nécessaire d'après le principe que j'ai rappelé. Elle est suffisante; car si elle est remplie, supposons menée la droite $\alpha\gamma$ et son homologue $\alpha'\gamma$, et cou-

pons par la droite double mm''; le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de mm'' avec $m\alpha$, $\alpha\gamma$, $\alpha m'$, $\alpha m''$ devra être le même que celui des points d'intersection de mm'' avec $m\alpha'$, $\alpha'\gamma$, $\alpha' m'$, $\alpha' m''$. Donc, γ doit se trouver sur une conique déterminée par les cinq points α, α', m, m', m''.

Ces propositions établies, je dis que sur la conique donnée il n'existe que deux points α, α' tels que l'un d'eux soit homologue de l'autre. Soit α' un point quelconque de la conique donnée, considéré comme appartenant à la figure F', mais différent des points doubles. Pour trouver son homologue α je puis me servir de la conique homologue de la première. L'homologue de α' ne peut se trouver sur la première conique qu'à la condition de coïncider avec l'un des quatre points d'intersection des deux coniques; autres que m, m', m'' qui sont des points doubles. Et réciproquement, un point autre que m, m', m'', situé à l'intersection de la conique donnée et de son homologue, sera l'homologue d'un point situé sur la conique donnée. On verrait de même que le point α' ne peut se trouver qu'à l'un des points d'intersection de la conique donnée et de l'homologue de cette conique considérée comme appartenant à la figure F.

Je crois superflu de traiter le théorème corrélatif; il suffit, dans le raisonnement, de remplacer les points par des droites, les points des coniques par des tangentes à ces courbes, et réciproquement.

Note du Rédacteur. — On démontre encore de la manière suivante qu'il ne peut exister sur une conique qui passe par les trois points m, m', m'' deux couples de points homologues α, α'; β, β'. En effet, si l'on joint les points α et α' au point β, $\alpha\beta$ aura pour homologue $\alpha'\beta$; et de même si l'on joint β et β' au point α, $\beta\alpha$ aura pour homologue $\beta'\alpha$. Donc $\alpha'\beta$ et $\alpha\beta'$ doivent coïncider, ce qui ne peut avoir lieu que si α et β coïncident ainsi que α' et β' P.

Question 753

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 95);

PAR M. C. MASSING,
Élève de l'École Centrale.

Si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné, on trouve une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2 = Ax^2 + By^2 + C.$$

Réciproquement, étant donnée une équation de cette forme, peut-on trouver une ellipse ou une hyperbole telle, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole, ces tangentes fassent un angle donné? Le problème a-t-il plusieurs solutions? (G. DARBOUX.)

L'équation du lieu des points d'où l'on peut mener à une hyperbole ou à une ellipse des tangentes faisant un angle V, est

$$(1)\quad (x^2+y^2)^2 \begin{array}{l|} -2(a^2\pm b^2) \\ -\dfrac{4a^2}{\operatorname{tang}^2 V} \end{array}\, y^2 \begin{array}{l|} -2(a^2\pm b^2) \\ \mp\dfrac{4b^2}{\operatorname{tang}^2 V} \end{array}\, x^2 + (a^2\pm b^2)^2 \pm \frac{4a^2b^2}{\operatorname{tang}^2 V} = 0,$$

le signe supérieur qui précède b^2 se rapportant à l'ellipse, le signe inférieur à l'hyperbole : a^2 et $\pm b^2$ désignant les carrés des longueurs des demi-axes de la conique, qu'on a rapportée à ses axes. Examinons dans quel cas on peut identifier l'équation (1) avec l'équation

$$(x^2+y^2)^2 - Ax^2 - By^2 - C = 0,$$

en supposant qu'on fasse précéder b^2 du signe $+$.

Pour que cette identification puisse avoir lieu, il faut

que les trois équations

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{\text{tang}^2 V} = \frac{B}{2},$$

$$(3) \qquad a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{\text{tang}^2 V} = \frac{A}{2},$$

$$(4) \qquad (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2 b^2}{\text{tang}^2 V} + C = 0,$$

donnent pour a^2, b^2 et $\text{tang}^2 V$ des valeurs réelles et positives.

L'inspection de ces équations montre que cela ne peut avoir lieu que si l'on n'a, tout d'abord,

$$B > A > 0,$$
$$C < 0.$$

Je cherche les valeurs de a^2, b^2 et $\text{tang}^2 V$ qui satisfont au système des équations (2), (3) et (4). J'élève au carré les deux membres de l'équation (3), et de l'équation ainsi obtenue, soit

$$(a^2 + b^2)^2 + \frac{4(a^2 + b^2)b^2}{\text{tang}^2 V} + \frac{4b^4}{\text{tang}^4 V} - \frac{A^2}{4} = 0,$$

je retranche l'équation (4); en effectuant les réductions, je trouve

$$(5) \qquad 4b^4 = \left(\frac{A^2}{4} + C\right) \sin^2 V \, \text{tang}^2 V.$$

Opérant de même sur l'équation (2), je trouve

$$(6) \qquad 4a^4 = \left(\frac{B^2}{4} + C\right) \sin^2 V \, \text{tang}^2 V;$$

et enfin si j'élimine a^2 et b^2 entre les équations (2), (3), (4), j'obtiens

$$(7) \qquad (A - B)^2 \, \text{tang}^4 V - 4(AB + 4C) \, \text{tang}^2 V - 16C = 0.$$

Cette équation, où $\tang^2 V$ est l'inconnue, aura ses racines réelles, si l'on a

$$(AB + 4C)^2 + 4C(A - B) > 0,$$

ou, sous une forme plus simple,

$$(-4C - B^2)(-4C - A^2) > 0.$$

ce qui exige que l'on ait ou

$$-4C < A^2,$$

ou

$$-4C > B^2.$$

Dans cette deuxième hypothèse, on aurait pour a^4 une valeur négative. Si donc les coefficients A, B, C satisfont aux inégalités

$$B > A > 0,$$

$$C < 0, \quad A^2 + 4C > 0,$$

on aura pour l'équation (7) deux racines réelles de même signe et positives, puisque l'on a

$$AB > A^2 > -4C,$$

et, par suite,

$$AB + 4C > 0:$$

et à ces racines correspondront des valeurs réelles et positives de a^4 et b^4, comme l'indiquent les équations (5) et (6).

Donc, dans les hypothèses où nous nous plaçons, il existe deux ellipses telles, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à ces ellipses, ces tangentes fassent un angle déterminé pour chacune d'elles par l'équation (7).

Examinons maintenant dans quel cas on pourra trou-

ver une ou plusieurs hyperboles répondant à la question. Je remplace dans toutes les équations précédentes b^2 par $-b^2$. A priori, pour qu'il y ait une solution au problème, il faut toujours que l'on ait

$$B > A.$$

Mais C peut être positif ou négatif. Examinons successivement ces deux cas :

1° Si C est positif, l'équation (7) a ses deux racines réelles en considérant $\tang^2 V$ comme inconnue, mais une seule est positive. L'équation (5) montre que si

$$\frac{A^2}{4} + C > o,$$

on aura une valeur positive de b^4 correspondant à cette valeur de $\tang^2 V$. Si donc les coefficients A, B, C satisfont aux inégalités

$$B > A, \quad C > o, \quad \frac{A^2}{4} + C > o,$$

on a une hyperbole répondant à la question.

2° Supposons $C < o$, les mêmes remarques que dans le cas de l'ellipse montrent que si l'on a

$$B > A, \quad \frac{A^2}{4} + C > o:$$

il existe deux hyperboles répondant à la question, et à chacune d'elles correspond un angle déterminé par l'équation (7), et tel, que si d'un point de la courbe donné on mène deux tangentes à cette hyperbole, elles fassent entre elles cet angle. Ainsi en résumé : pour que le problème admette une ou plusieurs solutions, il faut que les coefficients A, B, C satisfassent aux inégalités du tableau

suivant :

$$\begin{array}{c} B > A, \\ A^2 + 4C > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} C > 0, \\ \text{une hyperbole;} \\ C < 0 \left\{ \begin{array}{c} A > 0, \\ \text{deux ellipses et deux hyperboles;} \\ A < 0, \\ \text{deux hyperboles.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} B = A \\ C < 0 \\ A^2 + 4C > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 V = -\dfrac{4C}{A^2}, \\ a^2 = b^2 = \pm \dfrac{2C}{A}. \\ \text{un cercle et une hyperbole équilatère.} \end{array} \right.$$

Note. — La même question a été traitée par M. Niébylowski.

Question 757

(voir 2e série, t. V, p. 190);

PAR M. BRICOUT DE MONTAY.

On donne une courbe de troisième classe ayant une tangente double : les points de contact de cette courbe et de la tangente sont A, B. *D'un point quelconque pris dans le plan de la courbe donnée, on mène à celle-ci trois tangentes qui coupent la tangente* AB *aux points* M, N, P. *On a toujours*

$$\frac{AM \cdot AN \cdot AP}{BM \cdot BN \cdot BP} = \frac{\rho_a}{\rho_b},$$

ρ_a *et* ρ_b *étant les rayons de courbure de la courbe donnée aux points* A et B. (MANNHEIM.)

LEMME. — *On donne une courbe du troisième ordre*

ayant un point double O, *soient* OA *et* OB *les tangentes. Soit une sécante quelconque rencontrant la courbe aux trois points* M, N, P *et les deux tangentes aux points* A *et* B. *Je dis que*

$$\frac{\sin \mathrm{AOM} \sin \mathrm{AON} \sin \mathrm{AOP}}{\sin \mathrm{BOM} \sin \mathrm{BON} \sin \mathrm{BOP}}$$

est indépendant de la position de la sécante.

En effet,

$$\frac{\sin \mathrm{AOM}}{\sin \mathrm{BOM}} = \frac{\mathrm{AOM}}{\mathrm{BOM}} \cdot \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{AO}};$$

par suite

$$\frac{\sin \mathrm{AOM} . \sin \mathrm{AON} . \sin \mathrm{AOP}}{\sin \mathrm{BOM} . \sin \mathrm{BON} . \sin \mathrm{BOP}} = \frac{\mathrm{AM} . \mathrm{AN} . \mathrm{AP}}{\mathrm{BM} . \mathrm{BN} . \mathrm{BP}} \times \frac{\overline{\mathrm{BO}}^3}{\overline{\mathrm{AO}}^3}.$$

Or, rapportée aux deux tangentes, la courbe a pour équation

$$f(x, y) = xy + \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma x^2 y + \gamma' xy^2 = 0.$$

Soient

$$\mathrm{AO} = a, \quad \mathrm{BO} = b.$$

Alors

$$\frac{\mathrm{AM} . \mathrm{AN} . \mathrm{AP}}{\mathrm{BM} . \mathrm{BN} . \mathrm{BP}} \times \frac{\overline{\mathrm{BO}}^3}{\overline{\mathrm{AO}}^3} = \frac{f(a, 0)}{f(0, b)} \times \frac{b^3}{a^3} = \frac{\alpha}{\beta} = \text{const.}$$

Ce qui démontre notre lemme.

Si nous transformons cette proposition par les polaires réciproques, la courbe directrice étant un cercle, nous arrivons au théorème suivant :

Soient A *et* B *les points de contact d'une tangente double à une courbe de troisième classe, d'un point quel-*

conque on mène des tangentes à cette courbe qui rencontrent la première en MNP. *On a la relation*

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = k = \text{const.}$$

Supposons que le point O se meuve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, et supposons-lui une position telle, que AM et par suite BP soient des infiniment petits du premier ordre.

AM et BP sont alors égales à un infiniment petit du deuxième ordre près aux moitiés des arcs élémentaires s et σ de la courbe en A et B.

Si α et β sont les angles de AB avec OM et OP,

$$k = \frac{\frac{s}{\beta}}{\frac{\sigma}{\alpha}} \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN} = \frac{\rho_a}{\rho_b} \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN},$$

en négligeant les infiniment petits que l'on a le droit de négliger. Mais

$$\alpha = ON \frac{\sin(OM.ON)}{MN}, \quad \beta = ON \frac{\sin(ON.OP)}{NP}$$

et

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{NP}^2} \frac{\sin(ON.OP)}{\sin(OM.ON)}.$$

Quantité dont la limite, lorsque le point O est au milieu de AB, est égale à l'unité. On a donc

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = \frac{\rho_a}{\rho_b}.$$

QUESTIONS (*).

762. Le rayon de la sphère inscrite reste constant lorsque le centre de cette sphère se déplace sur une surface parallèle et égale à la première, cette seconde surface s'obtenant en faisant glisser la première parallèlement à son axe (**). (PAINVIN.)

763. Trouver la forme générale d'une fonction telle que

$$\varphi(x+y)\times\varphi(x-y)=[\varphi(x)+\varphi(y)][\varphi(x)-\varphi(y)].$$

(On sait que $\sin x$ et Ax sont des solutions particulières.) (J.-CH. DUPAIN.)

764. Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné et qui passent par deux autres points donnés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points donnés et qui passe par le premier point. (J.-CH. DUPAIN.)

765. On partage les côtés d'un carré en n parties égales; par les points de division on mène des parallèles aux côtés de manière à partager la figure en n^2 petits carrés. Pour se rendre d'un sommet du carré donné au sommet opposé, on peut suivre plusieurs lignes brisées différentes; parmi tous ces chemins, il y en a qui sont minimums et égaux entre eux; on propose d'en trouver le nombre. (J.-CH. DUPAIN).

(*) La solution de la question 725, p. 279, est illusoire. On donnera prochainement une solution exacte.

(**) *Voir* l'énoncé des questions 760 et 761 (p. 240).

NOTE

sur l'interprétation des formules qui donnent les angles des droites et des plans dans l'espace;

Par M. PAINVIN.

M. Chasles a donné, sur la transformation homographique des relations d'angles, un théorème général concernant le cas où les angles que l'on a à considérer dans une figure plane sont égaux; ce théorème, d'une extrême importance, se trouve énoncé et démontré dans la *Géométrie supérieure*, nos 624, 652. Les formules de la Géométrie analytique, qui fournissent les expressions des angles des droites et des plans dans l'espace, se prêtent facilement à une interprétation du même genre et conduisent à des propositions également importantes.

Quoique je n'aie vu nulle part ces propositions énoncées explicitement, j'ai tout lieu de croire, cependant, que plusieurs géomètres ont dû connaître et appliquer certaines d'entre elles, principalement celles qui conviennent aux droites et plans rectangulaires; ainsi, le beau Mémoire de M. Chasles, sur les surfaces homofocales (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L; 1860), renferme la considération du cercle imaginaire à l'infini. Je pense qu'il n'est pas inutile d'insister un peu sur cette question; et, si ces propositions ont déjà été énoncées, je laisse à qui de droit la priorité. Les formules bien connues de l'analytique à trois dimensions conduisant très-facilement à la démonstration des propositions que je vais énoncer, je supprimerai ces démonstrations.

ANGLE DE DEUX PLANS.

THÉORÈME I[er]. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé par deux plans donnés et par les deux plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement au cercle imaginaire à l'infini, l'angle* V *de ces deux plans sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation très-simple*

$$(1) \quad \operatorname{tang} V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}.$$

Dans l'évaluation du rapport anharmonique, on doit regarder comme associés les deux plans donnés, d'une part, et les deux plans tangents au cercle imaginaire à l'infini, d'autre part.

Lorsque deux plans sont rectangulaires, ils forment un faisceau harmonique avec les deux plans menés, par leur droite d'intersection, tangentiellement au cercle imaginaire à l'infini; ou encore, leurs traces sur le plan à l'infini sont conjuguées par rapport au cercle imaginaire.

Première conséquence. — Cette proposition nous fournit une méthode précieuse pour déterminer l'angle de deux plans dans un système quelconque de coordonnées, soit coordonnées obliques, soit coordonnées tétraédriques, etc.; il suffira, en effet, de déterminer le rapport anharmonique R défini dans le théorème précédent. Or, cette détermination ne saurait offrir de difficulté, car le cercle imaginaire est l'intersection d'une sphère quelconque par le plan à l'infini; d'un autre côté, les équations des plans d'un faisceau peuvent toujours se ramener à la forme

$$M - aN = 0, \quad M - bN = 0, \quad M - cN = 0, \quad M - dN = 0,$$

et l'on sait que le rapport anharmonique a pour expression

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)},$$

en regardant comme associés le premier et le troisième plans, le deuxième et le quatrième.

Deuxième conséquence. — Les questions où deux plans se trouvent assujettis à faire un angle donné peuvent être généralisées comme il suit :

1° A deux plans faisant un angle donné, on pourra substituer deux plans tels, que le faisceau, formé par ces deux plans et les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à une conique fixe et arbitrairement choisie, ait un rapport anharmonique donné ; les autres conditions restant les mêmes.

2° A deux plans faisant un angle donné, on pourra encore substituer deux plans tels, que le faisceau, formé par ces deux plans et les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à une surface du second ordre fixe et arbitrairement choisie, ait un rapport anharmonique donné.

A deux plans rectangulaires, on pourra substituer deux plans conjugués par rapport à une surface fixe du second ordre, c'est-à-dire deux plans tels, que le pôle de l'un quelconque d'entre eux soit sur l'autre.

Le degré des lieux géométriques correspondant à la question primitive restera le même pour la question généralisée.

ANGLE DE DEUX DROITES.

THÉORÈME II. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé par les polaires (relatives au cercle imaginaire à l'infini) des traces des deux droites don-*

nées sur le plan à l'infini et par les tangentes menées au cercle du point de concours des deux polaires, l'angle V *de ces deux droites sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation*

$$(2) \quad \tang V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1} \tang V}{1 + \sqrt{-1} \tang V}.$$

Dans l'évaluation de ce rapport anharmonique, on devra regarder comme associées les polaires des deux traces d'une part, les deux tangentes d'autre part.

Lorsque deux droites sont rectangulaires, leurs traces sur le plan à l'infini sont conjuguées par rapport au cercle imaginaire à l'infini ; ou encore, les polaires de leurs traces sont conjuguées par rapport à ce cercle.

Première conséquence. — Le théorème qui vient d'être énoncé nous fournit encore une méthode facile pour déterminer, dans un système quelconque de coordonnées, l'angle de deux droites.

Deuxième conséquence. — Cette proposition nous permet aussi de généraliser les questions où deux droites se trouvent assujetties à faire un angle donné.

A deux droites faisant un angle donné, on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique fixe dans ce plan, on exprimera que les polaires (relatives à la conique) des traces des deux droites sur le plan fixe forment, avec les tangentes menées à la conique du point de concours des deux polaires, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que les plans diamétraux respectivement conjugués des deux droites forment, avec les deux plans menés par leur droite d'intersection tangen-

tiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

Les deux plans tangents sont évidemment des plans asymptotes.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une surface fixe du second ordre (S) on exprimera que les plans polaires (relatifs à la surface S) des traces des deux droites sur le plan fixe forment, avec les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface S, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

A deux droites rectangulaires on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique fixe dans dans ce plan, on exprimera que les traces des deux droites sur le plan fixe sont conjuguées par rapport à la conique.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le plan diamétral conjugué de l'une quelconque des droites est parallèle à l'autre.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une surface fixe du second ordre S, on exprimera que les plans polaires (relatifs à S) des traces des deux droites sur le plan fixe sont conjugées, c'est-à-dire que la trace de l'une quelconque des droites sera sur le plan polaire de l'autre trace.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

THÉORÈME III. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé, d'une part, par la trace d'un plan donné sur le plan à l'infini et la polaire (relative au cercle imaginaire à l'infini) de la trace à l'infini d'une droite donnée; d'autre part, par les tangentes menées*

au cercle imaginaire à l'infini du point de concours des deux premières droites; l'angle V *de la droite et du plan sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation*

$$(3)\quad \cot V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\cot V}{1 + \sqrt{-1}\cot V}.$$

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la trace de la droite sur le plan du cercle imaginaire à l'infini est, par rapport à ce cercle, le pôle de la trace du plan, et réciproquement.

Première conséquence. — Le théorème énoncé permettra encore de trouver facilement, dans un système quelconque de coordonnées, l'expression analytique de l'angle d'une droite et d'un plan.

Deuxième conséquence. — De là aussi nous conclurons la généralisation des questions où une droite et un plan se trouvent assujettis à faire un angle donné.

A une droite et un plan faisant un angle donné, on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique dans ce plan, on exprimera que la polaire (par rapport à la conique) de la trace de la droite sur le plan fixe et la trace du plan donné forment, avec les tangentes menées à la conique par le point de concours des deux premières droites, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

2° Étant choisie une surface fixe du second ordre, on écrira que le plan diamétral conjugué de la droite et le plan donné forment, avec les deux plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une sur-

face fixe du second ordre, on exprimera que le plan polaire (par rapport à la surface) de la trace de la droite sur le plan fixe et le plan donné forment, avec les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

A une droite et un plan rectangulaires, on pourra substituer les conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique dans ce plan, on exprimera que la trace de la droite donnée sur le plan fixe est, par rapport à la conique fixe, le pôle de la trace du plan donné.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le plan diamétral conjugué de la droite est parallèle au plan donné.

3° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le pôle du plan donné par rapport à la surface fixe se trouve sur la droite considérée.

NOTE SUR L'INTERSECTION DES DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. ROUQUET,
Professeur au lycée de Pau.

Soient

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0,$$

les équations des deux courbes. En faisant, pour abréger,

$$A = a + a'\lambda,\quad B = b + b'\lambda,\quad C = c + c'\lambda, \ldots,$$

l'équation en λ se présente sous la forme

$$(1)\qquad AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC) = 0.$$

Il s'agit de prouver que l'une au moins des racines réelles de l'équation (1) satisfait à la condition

$$B^2 - 4AC > 0.$$

A cet effet, résolvons l'équation

$$B^2 - 4AC = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (b + b'\lambda)^2 - 4(a + a'\lambda)(c + c'\lambda) = 0,$$

qui devient, en ordonnant par rapport à λ,

$$(3) \quad (b'^2 - 4a'c')\lambda^2 + 2(bb' - 2ac' - 2a'c)\lambda + b^2 - 4ac = 0.$$

Il y a lieu de distinguer deux cas principaux.

1° $b'^2 - 4a'c' > 0$.

Si les racines de l'équation (3) sont imaginaires ou égales, toute valeur de λ donnera $B^2 - 4AC > 0$.

Supposons donc que les racines λ' et λ'' de l'équation (3) soient réelles et inégales.

Remarquons d'abord que ces racines donnent le même signe à la quantité $C = c + c'\lambda$. En effet, la valeur $\lambda = -\frac{c}{c'}$ qui annule C, rendant positif le premier membre de l'équation (2), puisqu'elle le réduit au terme qui est un carré parfait, est nécessairement en dehors des racines de cette équation. Par suite λ' et λ'' ne comprenant point la racine de l'équation $C = 0$ doivent donner même signe au binôme C. Admettons, pour fixer les idées, que ce signe soit positif.

Cela posé, les racines λ' et λ'' donnent à

$$(BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF)$$

une valeur positive, et comme on passe de cette expression au premier membre de l'équation (1), en divisant

par le facteur positif $4C$, λ' et λ'' satisferont à l'inégalité

$$(\alpha) \qquad AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) > 0.$$

Dès lors, les quantités λ' et λ'' comprennent entre elles deux racines de l'équation (1), ou aucune.

Dans le premier cas, la racine réelle de l'équation (1), non comprise entre λ' et λ'', donnera $B^2 - 4AC > 0$; dans le second, toutes les racines réelles de l'équation considérée rempliront cette condition.

Si les deux racines λ' et λ'' rendent C négatif, l'inégalité (α) change de sens, mais les conclusions sont les mêmes.

2° $b'^2 - 4a'c' < 0$.

On sait alors (*voir* les exercices de l'*Algèbre* de M. Bertrand, 1re édition, p. 143) que les deux racines de l'équation (3) sont réelles. En outre, la valeur $\lambda = -\frac{c}{c'}$, qui annule C, rendant positif le premier membre de l'équation (2), doit être comprise entre λ' et λ'', et par suite, ces racines donnent à C des signes différents. Le premier membre de l'équation (1) étant toujours positif pour $\lambda = \lambda'$, et $\lambda = \lambda''$, conduira à des quotients positifs ou négatifs suivant le signe de C, et l'on aura alternativement pour l'une et l'autre des valeurs λ' et λ''

$$AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) < \quad \text{ou} \quad > 0.$$

Il en résulte que λ' et λ'' comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation (1).

Si elles comprennent une seule racine, celle-ci rendra positive la quantité $B^2 - 4AC$.

Si elles en comprennent trois, toutes ces valeurs donneront

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Le cas de $b'^2 - 4a'c' = 0$ se ramène aisément aux pré-

cédentes. En résumé, on voit directement, par l'examen de l'équation en λ, qu'il existe toujours un ou trois couples de sécantes réelles communes à deux courbes du second degré.

SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES QUAND ELLES DEVIENNENT PARALLÈLES;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN,
Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université.

Étant données deux droites quelconques dont les équations sont :

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$
$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q',$$

on trouve la grandeur de leur plus courte distance en menant par l'une un plan P parallèle à l'autre, et prenant la distance d'un point de la dernière, par exemple de sa trace sur le plan xy à ce plan auxiliaire. On trouve ainsi :

$$(1) \qquad \delta^2 = \frac{[(b'-b)(p'-p)-(a'-a)(q'-q)]^2}{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}.$$

Si les droites deviennent parallèles, cette formule est indéterminée, et on ne peut lever cette indétermination par les considérations seules qui nous ont servi à établir la formule, puisque le plan auxiliaire cesse d'être défini. Cependant, la formule s'appliquant, quelque petits que soient $a'-a$ et $b'-b$, on doit voir ce qu'elle devient quand ces différences tendent indéfiniment vers zéro. Or, quand les droites deviennent parallèles, la perpendiculaire commune devient indéterminée de position, et non

transportée à l'infini; en exprimant ce fait, on trouve entre $a'-a$ et $b'-b$ une relation qui conduit à la limite de l'expression (1).

Soient :

$$a'-a=\Delta a,\quad b'-b=\Delta b.$$

Si entre les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites on élimine z (*), on a une équation qui convient à cette perpendiculaire :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(a'\Delta a+b'\Delta b)\{(x-p)\Delta a+(y-q)\Delta b\\ &\qquad\qquad +(b\Delta a-a\Delta b)[b(x-p)-a(y-q)]\}\\ &-(a\Delta a+b\Delta b)\{(x-p')\Delta a+(y-q')\Delta b\\ &\qquad\qquad +(b\Delta a-a\Delta b)[b'(x-p')-a'(y-q')]\}=0.\end{aligned}\right.$$

En regardant Δa et Δb comme de petites quantités du même ordre de petitesse, on remarque que le coefficient de x, savoir :

$$\Delta a(\Delta a^2+\Delta b^2)+\Delta a(b\Delta a-a\Delta b)^2$$

est de l'ordre de Δa^3; il en est de même du coefficient

(*) L'élimination de z est indiquée par la question que l'on traite ici. Il s'agit, en définitive, de déterminer la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{a'-a}{b'-b}$, quand a' et b' convergent vers a et b. Or, $\frac{a'-a}{b'-b}$ est, au signe près, le coefficient angulaire de la projection sur le plan xy, de la perpendiculaire commune aux deux droites proposées. Car en désignant par

$$x=\mathrm{A}z+\alpha,\quad y=\mathrm{B}z+\beta$$

les équations de cette perpendiculaire commune, on a

$$\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+1=0,\quad \mathrm{A}a'+\mathrm{B}b'+1=0,\quad \text{d'où}\quad \frac{a'-a}{b'-b}=-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

La limite de $\frac{a'-a}{b'-b}$ est par conséquent la valeur que prend le coefficient angulaire $-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ de la perpendiculaire commune, lorsque l'une des droites proposées devient parallèle à l'autre. G.

de y. Le terme constant est au contraire de l'ordre de Δa^2, en sorte que cette droite serait rejetée à l'infini quand Δa est nul. Pour qu'elle reste à une distance finie et tendant à l'indétermination, il faut que les termes de l'ordre de Δa^2 dans la partie constante de (2) se détruisent; on trouve ainsi, en supprimant le facteur $a\Delta a + b\Delta b$ qui ne peut être nul, car (2) se réduirait à

$$b(x-p)-a(y-q)=0,$$

ce qui est inadmissible; on trouve la condition :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta a}{(1+a^2)(q'-q)-ab(p'-p)} \\ & = \frac{\Delta b}{(1+b^2)(p-p')-ab(q-q')}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, la formule (1) peut s'écrire

$$\delta^2 = \frac{[(p'-p)\Delta b-(q'-q)\Delta a]^2}{\Delta a^2+\Delta b^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2};$$

elle est homogène en Δb, Δa, qu'on peut remplacer par les valeurs proportionnelles d'après l'équation (3); alors on trouve en supprimant les facteurs communs haut et bas,

$$\delta^2 = \frac{(p'-p)^2+(q'-q)^2+[b(p'-p)-a(q'-q)]^2}{1+a^2+b^2}.$$

C'est précisément la distance de la trace sur le plan xy d'une des droites à l'autre, c'est-à-dire la distance cherchée dans le cas qui nous occupe.

FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

Par M. E. BARBIER.

$$(1)\qquad \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A}{\cos b \cos c} + \frac{\operatorname{tang} B}{\cos b} + \frac{\operatorname{tang} C}{\cos c},$$

$$\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a}{\cos B \cos C} - \frac{\operatorname{tang} b}{\cos B} - \frac{\operatorname{tang} c}{\cos C}.$$

$$(2)\qquad \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a.$$

$$(3)\qquad \frac{\sin A}{\operatorname{tang} b \cos c - \cos A \sin c} = \frac{\operatorname{tang} C \cos B + \cos a \sin B}{\sin a}.$$

$$(4)\qquad \sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c,$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.$$

$$(5)\qquad \frac{\operatorname{tang} A \sin B - \cos c \cos B}{\sin c} = \frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b + \cos C}{\operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a \cos C},$$

$$\frac{\operatorname{tang} a \sin b + \cos C \cos b}{\sin C} = \frac{\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B - \cos c}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} A \cos c}.$$

$$(6)\qquad \frac{\sin C}{\sin B \operatorname{tang} c} = \sin a \cos C + \cot b \cos a,$$

$$\frac{\sin c}{\sin b \operatorname{tang} C} = \sin A \cos c - \cot B \cos A.$$

La formule (1) donne à la limite pour le triangle rectiligne la formule bien connue

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C.$$

Toutes ces formules s'obtiennent en menant des diagonales dans la figure formée par deux triangles supplémentaires.

Les formules qui ne contiennent point de tangente ont

été obtenues en égalant les valeurs du cosinus d'une diagonale déduites de deux triangles sphériques qui ont cette diagonale pour côté commun.

Les formules qui contiennent des tangentes ont été obtenues en calculant la cotangente d'un angle partagé en deux parties, par le moyen des cotangentes de ces deux parties.

La démonstration de ces formules est facile par cette méthode.

L'une de ces formules a été trouvée par M. Cayley et a été démontrée par M. Airy, astronome royal d'Angleterre, dans le *Philosophical Magazine*.

Les formules (2), (3) et (4) sont écrites dans le tome I des *Annales de l'Observatoire impérial de Paris*.

Je ne sache pas que les formules (1) et (5) aient été remarquées.

THÉORÈMES SUR LE CERCLE OSCULATEUR A UNE PARABOLE;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné est un second cercle qui touche intérieurement le premier au point donné et dont le rayon est quatre fois moindre.

Je prends pour origine le point donné, pour axe des x la tangente au cercle et pour axe des y la normale;

R, rayon du cercle;

α, β, coordonnées du foyer d'une parabole osculatrice au cercle au point donné;

$my + nx + p = 0$, équation de la directrice de cette parabole.

L'équation de la parabole peut être mise sous deux formes différentes :

$$(1) \qquad Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}\,xy + Cx^2 - 2CRy = 0 \quad (*),$$

$$(2) \begin{cases} (1-m^2)y^2 - 2mnxy + (1-n^2)x^2 \\ \quad -2(\beta+mp)y - 2(\alpha+np)x + \alpha^2+\beta^2-p^2 = 0. \end{cases}$$

Je suppose d'abord que le radical de l'équation (1) ait le signe —, et j'écris que cette équation multipliée par un coefficient indéterminé λ est identique à l'équation (2), ce qui fournit six équations :

$$(3) \qquad \lambda A = 1 - m^2$$

$$(4) \qquad \lambda\sqrt{AC} = mn,$$

$$(5) \qquad \lambda C = 1 - n^2,$$

$$(6) \qquad \lambda CR = \beta + mp,$$

$$(7) \qquad 0 = \alpha + np,$$

$$(8) \qquad 0 = \alpha^2 + \beta^2 - p^2.$$

Je tire m et n des équations (3), (5) pour les porter dans l'équation (4) qui devient

$$\lambda = \frac{1}{A+C};$$

par suite,

$$m = \pm\sqrt{1-\lambda A}, \quad m = \pm\sqrt{\frac{C}{A+C}}.$$

Je prends d'abord

$$m = +\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

et l'équation (4) donne

$$n = +\sqrt{\frac{A}{A+C}}.$$

(*) Cette forme d'équation a été imaginée par Frégier (*voyez* les *Annales de Gergonne*, t. VI, *voyez* aussi la solution de la question 644).

Les valeurs de m et de n, substituées dans (6) et (7), donnent

$$\alpha = -p\sqrt{\frac{A}{A+C}}, \quad \beta = \frac{CR}{A+C} - p\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

et ces valeurs elles-mêmes, substituées dans l'équation (8), conduisent à

$$p = +\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

d'où

$$\alpha = -\frac{R\sqrt{AC}}{2(A+C)}, \quad \beta = \frac{CR}{2(A+C)};$$

or, il est visible que

$$p^2 = \frac{R\beta}{2}; \quad \text{donc} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{R\beta}{2};$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\left(\frac{R}{4}\right) = 0.$$

C. Q. F. D.

L'équation de la directrice de la parabole s'obtient en remplaçant m, n, p par leurs valeurs,

$$y\sqrt{\frac{C}{A+C}} + x\sqrt{\frac{A}{A+C}} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{A+C}} = 0,$$

ou

$$y + x\sqrt{\frac{A}{C}} + \frac{R}{2} = 0.$$

Si l'on avait adopté pour m la valeur $-\sqrt{\frac{C}{A+C}}$, n et p auraient changé de signe, mais la directrice et par suite le foyer n'auraient pas changé.

En prenant le radical de l'équation (1) avec le signe $+$, α change de signe, mais le lieu des foyers reste le même et

la directrice devient

$$y - x\sqrt{\frac{A}{C}} + \frac{R}{2} = 0.$$

Donc *les paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné sont deux à deux égales et symétriquement placées par rapport à la normale commune.*

L'ordonnée à l'origine de la directrice est constamment $-\frac{R}{2}$, donc :

Les directrices des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné passent par un point fixe.

Le rayon de courbure d'une parabole en un point donné sur la courbe est double du segment de la normale en ce point, compris entre la directrice et le point même.

Il en résulte une construction du rayon de courbure très-simple et peut-être nouvelle.

Note du Rédacteur. — Dans l'*Analyse des infiniment petits* (2e édition, publiée en 1715), il est démontré que : Si l'on projette sur un rayon vecteur FA d'une parabole, le rayon AC du cercle osculateur au point A, la projection AB est double du rayon vecteur FA.

Il en résulte que la perpendiculaire élevée au foyer F sur le rayon vecteur FA, rencontre le rayon de courbure AC en son milieu M, puisque F est le milieu de AB. Par conséquent, le lieu géométrique des foyers F des paraboles osculatrices à un cercle donné, en un point donné A, est la circonférence décrite sur AM comme diamètre. Ce qui est la proposition démontrée par M. Dupain.

Soient AD la perpendiculaire abaissée du point A sur la directrice de la parabole dont F est le foyer, et H le point où le rayon de courbure CA prolongé coupe cette directrice. L'angle DAH est, comme on sait, égal à l'angle FAC. Par suite, la similitude des triangles rectangles BAC, DAH donne

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AD} = \frac{2\,AF}{AD} = 2.$$

Donc le rayon de courbure AC est double du segment AH.

Il est clair que les directrices des paraboles osculatrices au cercle C, au point donné A, passent par le point H qui est fixe. G.

QUESTION D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE;

Par MM. MISTER et NEUBERG,
Professeurs à Nivelles (Belgique).

Quelle est la condition nécessaire pour que les deux valeurs de x soient égales et de même signe dans l'équation (*)

$$(cd-g^2)x^2-[(1+a^2)d+(1+b^2)c-2abg]\sqrt{1+a^2+b^2}.x \\ +(1+a^2+b^2)^2=0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à x, la quantité sous le radical devra être égale à zéro, ce qui donne

$$[(1+a^2)d+(1+b^2)c-2abg]^2-4(cd-g^2)(1+a^2+b^2)=0.$$

Développant le carré et ordonnant par rapport à g, il vient

$$4(1+a^2+b^2+a^2b^2)g^2-4ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]g \\ +[(1+a^2)d+(1+b^2)c]^2-4cd(1+a^2+b^2)=0,$$

ou

$$g^2-\frac{ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]}{(1+a^2)(1+b^2)}g \\ +\frac{[(1+a^2)d+(1+b^2)c]^2-4cd(1+a^2+b^2)}{4(1+a^2)(1+b^2)}=0.$$

(*) Cette équation est celle qu'on obtient lorsqu'on cherche sur une surface le point pour lequel les deux rayons de courbure principaux sont égaux.

Si l'on complète le carré commencé en g, on aura

$$\left\{ g - \frac{ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)} \right\}^2 + \frac{[(1+a^2)d+(1+b^2)c]^2 - 4cd(1+a^2+b^2)}{4(1+a^2)(1+b^2)} - \frac{a^2b^2[(1+a^2)d+(1+b^2)c]^2}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0;$$

réduisons au même dénominateur, cette égalité pourra s'écrire

$$\left\{ g - \frac{ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)} \right\}^2 + \frac{(1+a^2+b^2)\left\{[(1+a^2)d+(1+b^2)c]^2 - 4cd(1+a^2)(1+b^2)\right\}}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0,$$

ou encore

$$\left\{ g - \frac{ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)} \right\}^2 + \frac{(1+a^2+b^2)[(1+a^2)d-(1+b^2)c]^2}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0.$$

Cette somme de carrés ne pourra être nulle que si chaque carré est nul séparément; il faut donc que l'on ait :

$$g = \frac{ab[(1+a^2)d+(1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)},$$

$$(1+a^2)d = (1+b^2)c,$$

et, par suite,

$$g = \frac{abc}{1+a^2} = \frac{abd}{1+b^2}.$$

Telle est la relation qui doit être satisfaite pour que l'équation proposée ait ses deux racines égales et de même signe.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU 3e DEGRÉ ;

Par M. Joseph SIVERING,
Ingénieur.

Pour résoudre l'équation algébrique du troisième degré, on fait usage, dans certains cas, de formules trigonométriques, auxquelles on est parvenu en se basant sur les logarithmes imaginaires et sur la formule de Moivre.

En remplacement de ces procédés transcendants, nous proposons ci-après une méthode élémentaire, qui nous paraît d'une application sûre et expéditive dans tous les cas.

On démontre en algèbre que toute équation numérique de degré impair, a toujours un nombre impair de racines réelles de signe contraire à celui de son dernier terme. D'après cette proposition, l'équation $x^3 + px + q = 0$ aurait donc une ou trois racines de signe contraire à celui de q. Or, elle ne peut avoir trois racines pareilles, car l'équation est privée de son second terme, partant les racines ont leur somme égale à zéro, et ne peuvent être affectées toutes trois du même signe.

L'équation $x^3 + px + q = 0$ *a donc toujours une, et seulement une racine de signe contraire à celui de son dernier terme.*

Cette remarque est la base d'un mode de résolution simple et pratique, car elle révèle l'existence, entre zéro et $-\frac{q}{0}$, d'une racine unique qu'on pourra chercher, sans craindre d'être troublé dans les calculs par la présence simultanée de plusieurs racines voisines.

Passons à la détermination de cette racine, et dans ce but mettons l'équation sous la forme

$$x = -\frac{q}{x^2 + p}.$$

Pour que x soit affectée d'un signe contraire à celui de q, il faut et il suffit que dans la fraction $\frac{q}{x^2 + p}$ le dénominateur soit toujours positif. En tenant compte de cette remarque dans les essais à faire, toute valeur numériquement trop petite ou trop grande, mise à la place de x dans le second membre de l'égalité

$$x = -\frac{q}{x^2 + p},$$

en rendra le premier membre numériquement trop grand ou trop petit.

Ainsi attribuons à x une valeur d'essai quelconque a, d'un signe contraire à celui de q et telle encore que l'expression $a^2 + p$ reste positive, a sera une première limite de la racine; une seconde limite en sens inverse sera la fraction $-\frac{q}{a^2 + p}$. En essayant ensuite une valeur intermédiaire entre les nombres a et $-\frac{q}{a^2 + p}$, nous aurons un nouveau couple de limites, plus rapprochées. Quelques opérations pareilles conduiront de plus en plus près de la racine cherchée, et les limites voisines trouvées indiqueront à tous les instants le degré d'approximation obtenu.

La première racine trouvée, le calcul des autres racines, réelles ou imaginaires, n'est plus une difficulté. Réduisons toutefois ce calcul en une formule, pour montrer combien le degré d'approximation pourra également

y être satisfaisant. En divisant x^3+px+q par un facteur quelconque $x-a$, on trouve pour quotient

$$x^2+ax+a^2+p,$$

et pour reste

$$a^3+ap+q.$$

Si a est une racine, le reste de la division a^3+ap+q sera nul, et le quotient égalé à zéro donnera les deux autres racines.

Ainsi a étant une racine de l'équation

$$x^3+px+q=0,$$

les deux autres racines seront données par

$$x^2+ax+a^2+p=0,$$

et vaudront

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-p}.$$

METHODE

pour résoudre les équations du 3e degré en amenant dans le premier membre un cube parfait;

Par M. R. ALEXANDRE.

Le type général des équations du troisième degré est

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Si nous y remplaçons x par $y+h$, y étant une nouvelle inconnue, et h une indéterminée, nous aurons une équation de la même forme en y :

$$(1)\qquad y^3+p'y^2+q'y+r'=0,$$

dans laquelle on a

$$p' = 3h + p,$$
$$q' = 3h^2 + 2ph + q,$$
$$r' = h^3 + ph^2 + qh + r.$$

L'indétermination de h nous permet d'établir une relation entre ces trois coefficients; posons donc

$$(2) \qquad 3p'r' = q'^2;$$

ou, p', r', q' étant remplacés par leurs valeurs,

$$3(3h + p)(h^3 + ph^2 + qh + r) = (3h^2 + 2ph + q)^2.$$

Développée et ordonnée, cette équation se réduit à

$$h^2(3q - p^2) + h(9r - pq) + 3pr - q^2 = 0.$$

Supposons que dans l'équation (1), on ait remplacé h par une de ses valeurs, et divisons tous ses termes par r', nous aurons

$$\frac{y^3}{r'} + \frac{p'y^2}{r'} + \frac{q'y}{r'} + 1 = 0.$$

Changeons une dernière fois d'inconnue, en faisant

$$\frac{y}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{z},$$

l'équation deviendra

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Multiplions tout par z^3, cela donne

$$z^3 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}}z^2 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}}z + 1 = 0.$$

Faisons maintenant, pour mieux mettre en évidence

le résultat que nous avons obtenu :

$$\frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}} = n.$$

Comme nous avons posé

$$3p'r' = q'^2,$$

nous aurons aussi

$$\frac{3p'r'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{r'^{\frac{1}{3}}},$$

ou encore

$$\frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{3r'^{\frac{4}{3}}} = \frac{n^2}{3}.$$

L'équation (3) devient alors

$$z^3 + nz^2 + \frac{n^2}{3}z + 1 = 0,$$

et peut s'écrire

$$z^3 + 3\frac{n}{3}z^2 + 3\frac{n^2}{9}z + \frac{n^3}{27} = \frac{n^3}{27} - 1.$$

Et l'on tire de cette équation, le premier membre étant un cube parfait,

$$z = -\frac{n}{3} + \sqrt[3]{\frac{n^3}{27} - 1}.$$

Remarquons que n est ici entièrement connu, et que l'on peut remonter de z à x, par l'intermédiaire de y, au moyen des relations très-simples :

$$y = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z},$$

$$x = y + h = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z} + h.$$

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 755;

PAR M. H. MOREAU,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon
(classe de M. Chevilliet.)

Soient F, F', *les foyers d'une ellipse de Cassini,* C *son centre,* P *un point quelconque pris sur la courbe. La normale en* P *fera avec l'un des rayons vecteurs* PF *un angle égal à celui que la droite* PC, *menée au centre, fait avec l'autre rayon vecteur* PF'.

Démonstration analytique. — Soient x, y, les coordonnées du point P, α l'angle CPF', α' l'angle FPN que la normale PN forme avec le rayon vecteur PF.

On aura

$$\tang \alpha = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+c}}{1 + \dfrac{y^2}{x(x+c)}} = \frac{yc}{x(x+c) + y^2}.$$

Cherchons maintenant la valeur de $\tang \alpha'$.

Le coefficient angulaire y' de la normale au point P est donné par l'équation

$$y' = \frac{y(x^2+y^2+c^2)}{x(x^2+y^2-c^2)};$$

d'où

$$\tang \alpha' = \frac{\dfrac{y}{x-c} - \dfrac{y(x^2+y^2+c^2)}{x(x^2+y^2-c^2)}}{1 + \dfrac{y^2(x^2+y^2+c^2)}{x(x-c)(x^2+y^2-c^2)}}$$

$$= \frac{cy[(x-c)^2+y^2]}{(x^2+y^2)[(y^2+x^2-cx)+c^2(y^2+cx-x^2)]}.$$

Mais,

$$(x^2+y^2)(y^2+x^2-cx)=(x^2+y^2)[y^2+(x-c)^2]$$
$$-c^2(x^2+y^2)+cx(x^2+y^2);$$

d'autre part,

$$c^2(y^2+cx-x^2)=+c^2(x^2+y^2)+cx(c^2-2cx);$$

donc,

$$\text{tang}\,\alpha'=\frac{cy[(x-c)^2+y^2]}{(x^2+y^2+cx)[y^2+(x-c)^2]}=\frac{cy}{x(x+c)+y^2}=\text{tang}\,\alpha.$$

Il s'ensuit $\alpha'=\alpha$. Ce qu'il fallait démontrer.

Note.— Des démonstrations semblables à la précédente ont été données par MM. Charles Ribeaucourt, du lycée de Lille; Venceslas Niébylowski, du lycée Bonaparte; Alphonse Tubrun, du lycée de Strasbourg; P. Marques Braga, du lycée Saint-Louis.

Autre solution de la même question;

Par M. MARQUES BRAGA,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Soit P′ un point voisin du point P, sur la courbe. Décrivons de F comme centre, avec FP′ pour rayon, un arc rencontrant le rayon vecteur FP, en R (*). Décrivons, de même, de F′ comme centre, avec F′P′ pour rayon, un arc de cercle coupant F′P, en K.

Lorsque P′ est infiniment voisin de P, les triangles PRP′, PKP′ sont rectangles en R et en K, car les arcs de cercle P′R, P′K se confondent alors avec leurs tangentes.

Nous avons donc

$$\text{PR}=\text{PP}'\cos(\text{P}'\text{PR})\quad\text{et}\quad\text{PK}=\text{PP}'\cos(\text{P}'\text{PF}').$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si nous appelons r, r', les distances FP, F′P, les accroissements PR, PK seront Δr, $-\Delta r'$. A la limite, PP′ devient tangente au point P, et en désignant par ω, ω' les angles P′PR, P′PF′, on aura

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = -\frac{dr}{dr'},$$

ou, parce que $rr' = \text{const.}$,

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \frac{r}{r'}.$$

La droite PC étant la médiane du triangle FPF′, on a :

$$\frac{\sin \mathrm{F'PC}}{\sin \mathrm{FPC}} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FP'}} = \frac{r}{r'}.$$

D'où

$$\frac{\sin \mathrm{F'PC}}{\sin \mathrm{FPC}} = \frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega'\right)}.$$

Mais il est évident que

$$\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\omega'\right) = \mathrm{F'PC} + \mathrm{FPC}.$$

D'où

$$\mathrm{F'PC} = \frac{\pi}{2}-\omega,$$

et

$$\mathrm{FPC} = \left(\frac{\pi}{2}-\omega'\right).$$ C. Q. F. D. (*).

(*) En général, si $f(r, r') = 0$ représente l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées bipolaires, et f'_r, $f'_{r'}$ les dérivées de $f(r, r')$ par rapport à r et à r', pour construire la normale en un point P de la courbe, il suffira de prendre sur les rayons vecteurs PF, PF′ dans le sens de ces

Note. — M. Martel, élève du lycée Saint-Louis, résout la question de la même manière.

M. J. Gazères déduit de l'équation $rr' =$ const. :

$$(r+dr)(r'+dr') = rr', \quad rdr'+r'dr+dr\,dr' = 0, \quad \frac{dr}{dr'} = -\frac{r}{r'}.$$

Cette dernière relation le conduit à une construction très-simple de la tangente, et par suite au théorème énoncé.

M. E. Muzeau, lieutenant d'artillerie, construit d'abord la tangente au point P, en suivant la méthode de Roberval; cette construction met en évidence la propriété de la normale.

Question 756;

Par M. Em. C.,

Soient F, F′ *deux points fixes sur une surface sphérique, et considérons la courbe, lieu du point* P *tel, que* $\tang \frac{1}{2}\,\mathrm{PF} \,.\, \tang \frac{1}{2}\,\mathrm{PF}' =$ const. *Le grand cercle normal en* P *à cette courbe fera avec* FP *un angle égal à celui que fait avec* F′P *le grand cercle passant par* P *et le milieu de l'arc* FF′.

Je désigne par ρ et ρ' les arcs PF, PF′. Soit M le milieu de l'arc FF′; soient β et β' les angles de PM avec PF et PF′.

Dans le triangle sphérique PMF, on a

$$\frac{\sin\beta}{\sin \mathrm{MF}} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{PMF}}}{\sin\rho}.$$

---

rayons (si les dérivées de f'_r, $f'_{r'}$ sont positives), des distances PA, PB, proportionnelles à f'_r, $f'_{r'}$ et de mener la médiane PM du triangle PAB. Dans le cas actuel, $f'_r = r' = \mathrm{PF}'$ et $f'_{r'} = r = \mathrm{PF}$. Les triangles PAB, PF′F sont, par conséquent, semblables, et il est alors évident que l'angle MPF est égal à l'angle CPF′, puisque PC est la médiane du triangle PF′F. G.

De même dans le triangle sphérique PMF′, on a

$$\frac{\sin\beta'}{\sin \mathrm{MF}} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{PMF}}}{\sin\rho'}.$$

D'où

(1) $$\frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\rho}{\sin\rho'}.$$

Soit, maintenant, p un point infiniment voisin de P sur l'arc de grand cercle tangent en P; soient α et α' les angles que font PF et PF′ avec l'arc de grand cercle normal.

On trouve sans peine

$$\sin\alpha = \frac{\pm\, d\rho}{ds}, \quad \sin\alpha' = \frac{\pm\, d\rho'}{ds};$$

(2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \pm\frac{d\rho}{d\rho'};$$

le double signe étant mis, afin que les sinus et par suite leur rapport soient toujours positifs.

Mais de l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho \times \operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho' = \text{const.},$$

on tire, en différentiant,

$$\frac{d\rho \operatorname{tang}\frac{\rho'}{2}}{\cos^2\frac{\rho}{2}} + \frac{d\rho' \operatorname{tang}\frac{\rho}{2}}{\cos^2\frac{\rho'}{2}} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{\sin\rho} + \frac{d\rho'}{\sin\rho'} = 0.$$

A cause de (2), cette dernière égalité donne

(3) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\rho}{\sin\rho'}.$$

Or,

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta';$$

donc de (1) et (3), il suit que l'on a

$$\alpha = \beta'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Muzeau, Gazères et Moreau, élève du lycée de Besançon.

Question 749;

PAR MM. CAMILLE MASSING ET H. KAENTZ,
Élèves de l'École Centrale.

$My^2 + Nx^2 - 1 = 0$, *étant l'équation d'une conique, α, β, γ représentant les angles faits avec l'axe des x par les côtés d'un triangle* ABC, *inscrit dans la conique, et x_0, y_0, r représentant les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a les relations suivantes :*

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{Nx_0}{r(M-N)},$$

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{My_0}{r(M-N)},$$

$$M[y_0 - r\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2 + N[x_0 - r\sin(\alpha+\beta+\gamma)]^2 - 1 = 0 \quad (*).$$

Démonstration. — En désignant par x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des sommets A, B, C, nous avons les relations

$$\frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\sin\alpha},$$

$$My_1^2 + Nx_1^2 - 1 = 0,$$

$$My_2^2 + Nx_2^2 - 1 = 0;$$

(*) Nous rectifions, dans ces formules, deux fautes qui nous ont été indiquées par MM. Massing et Kaentz et par M. Melon.

d'où nous tirons

$$(1)\qquad M(y_1+y_2)\sin\alpha + N(x_1+x_2)\cos\alpha = 0.$$

Les coordonnées x_0, y_0 du centre du cercle circonscrit au triangle, vérifiant l'équation de la perpendiculaire élevée au milieu du côté AB, nous avons

$$(2)\quad (y_1+y_2)\sin\alpha + (x_1+x_2)\cos\alpha = 2(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha).$$

Les relations (1), (2) donnent

$$x_1+x_2 = \frac{2M}{M-N}\left(x_0 + y_0\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

$$y_1+y_2 = -\frac{2N}{M-N}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

On aura de même

$$x_2+x_3 = \frac{2M}{M-N}\left(x_0 + y_0\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right),$$

$$y_2+y_3 = -\frac{2N}{M-N}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right).$$

D'où

$$x_3-x_1 = \frac{2M}{M-N}y_0\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$y_3-y_1 = \frac{2N}{M-N}x_0\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Mais

$$\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma} = 2r\sin(\beta-\alpha)\ (*),$$

(*) $\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma}$ représente la valeur du côté AC; d'ailleurs

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin B:$$

l'égalité

$$\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma} = 2r.\sin(\beta-\alpha),$$

revient donc à

$$AC = 2r.\sin B,$$

formule bien connue.

et

$$\frac{y_3 - y_1}{\sin\gamma} = 2r\sin(\beta - \alpha);$$

en égalant ces dernières valeurs de $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$ à celles que nous avons précédemment obtenues, il vient

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{My_0}{r(M - N)},$$

et

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{Nx_0}{r(M - N)}.$$

Ce sont les deux premières relations qu'il fallait démontrer.

Actuellement, cherchons les coordonnées du quatrième point d'intersection de la conique $My^2 + Nx^2 - 1 = 0$, et du cercle circonscrit au triangle ABC (les trois autres points d'intersection étant les sommets A, B, C du triangle).

En éliminant x entre les équations

$$My^2 + Nx^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

nous trouvons une équation du quatrième degré, dans laquelle la somme des quatre racines y_1, y_2, y_3, y_4 est donnée par la relation

$$(3) \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{4Ny_0}{N - M}.$$

Or, d'après les égalités déjà obtenues, on a :

$$y_1 + y_2 = +\frac{2N}{N - M}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

$$y_2 + y_3 = +\frac{2N}{N - M}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right),$$

$$y_3 + y_1 = +\frac{2N}{N - M}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right);$$

d'où

$$(4)\ y_1+y_2+y_3=\frac{3Ny_0}{N-M}+\frac{N}{N-M}x_0\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 6}{\sin 6}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

En retranchant l'équation (4) de l'équation (3), on a

$$(5)\qquad y_4=\frac{Ny_0}{N-M}-\frac{N}{N-M}x_0\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 6}{\sin 6}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

Or,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 6}{\sin 6}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\cos\alpha\cos 6\cos\gamma-\cos(\alpha+6+\gamma)}{\sin\alpha\sin 6\sin\gamma},$$

et

$$\frac{N}{N-M}x_0=-r\sin\alpha\sin 6\sin\gamma,$$

$$\cos\alpha\cos 6\cos\gamma=\frac{My_0}{r(M-N)}.$$

Au moyen de ces dernières relations, l'équation (5) devient

$$y_4=\frac{Ny_0}{N-M}-\frac{My_0}{N-M}-r\cos(\alpha+6+\gamma)$$

$$=y_0-r\cos(\alpha+6+\gamma).$$

Un calcul semblable donne

$$x_4=x_0-r\sin(\alpha+6+\gamma).$$

Donc

$$M[y_0-r\cos(\alpha+6+\gamma)]^2+N[x_0-r\sin(\alpha+6+\gamma)]^2-1=0.$$

Ce qui démontre la troisième relation.

Note. — La même question a été résolue par M. Melon, et par M. Camille Laduron, élève à l'École des Mines de Liége.

SOLUTION DE LA QUESTION

donnée au concours général de 1862 pour la classe de Mathématiques spéciales ;

Par M. LEBASTEUR.

(Copie couronnée.)

On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA′ *leurs rayons vecteurs minimums; on fait tourner ces rayons vecteurs autour de* F, *en conservant leur distance angulaire; soit* FC, FC′ *une position. En* C *et* C′ *on mène les tangentes à chacune des coniques. Trouver le lieu de leur point* M *de rencontre.*

L'équation de la première conique, en prenant pour axes les parallèles aux axes de la courbe menés par le foyer F, est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \gamma^2,$$

où

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \gamma = x + \frac{b^2}{c}.$$

Celle de la deuxième est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \Gamma^2,$$

ε ayant la même valeur puisque les axes sont proportionnels, et

$$\Gamma = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p,$$

où

$$p = k\frac{b^2}{c},$$

k étant le rapport donné de proportionnalité et α l'angle AFA'.

Les tangentes aux points C et C' auront pour équations, en appelant φ l'angle CFx,

$$(1) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \varepsilon\gamma,$$

$$(2) \qquad x\cos(\varphi+\alpha) + y\sin(\varphi+\alpha) = \varepsilon\Gamma.$$

En éliminant φ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. A cet effet, j'écris la deuxième

$$(3) \quad (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\cos\varphi + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\sin\varphi = \varepsilon\Gamma.$$

Des équations (1) et (3), considérées comme deux équations du premier degré entre $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, je tire les valeurs de ces inconnues

$$(4) \qquad \sin\varphi = \varepsilon\,\frac{\gamma(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \Gamma x}{(x^2+y^2)\sin\alpha},$$

$$(5) \qquad \cos\varphi = \varepsilon\,\frac{\gamma(y\cos\alpha - x\sin\alpha) - \Gamma y}{(x^2+y^2)\sin\alpha},$$

et faisant la somme des carrés de (4) et (5), on a

$$(6) \qquad \Gamma^2 + \gamma^2 - 2\Gamma\gamma\cos\alpha = (x^2+y^2)\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon^2}.$$

L'équation (6) est sous une forme très-remarquable l'équation d'un cercle. En remplaçant Γ, γ par leurs valeurs, cette équation devient

$$\frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha(x^2+y^2) - 2\frac{b^2}{c}(1+\cos^2\alpha - 2k\cos\alpha)x$$
$$- 2\frac{b^2}{c}\sin\alpha(1-\cos\alpha)y - \frac{b^4}{c^2}(1+k^2-2k\cos\alpha) = 0.$$

Mais il n'est nul besoin de faire cette substitution. Il suffit qu'il demeure acquis que le lieu est un cercle, et la Géométrie termine très-élégamment la question.

L'équation (6) nous fournira seulement un dernier résultat.

Si l'on cherche, en effet, la position du cercle qu'elle représente relativement aux deux coniques données, on reconnaît tout de suite qu'il est doublement tangent à chaque conique.

Donc le centre du cercle se trouve sur chacun de leurs petits axes et par suite à leur intersection.

En outre, dans la position primitive des rayons vecteurs minimums, et après une rotation de 180 degrés, il est clair que nous avons les deux points des extrémités du diamètre du cercle; donc ce cercle est complétement défini.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. GROUARD

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 546);

PAR M. P. SAACKÉ,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier
(classe de M. Garlin).

---

1. *On donne un cercle* O *et un point* F *dans un plan: l'enveloppe d'un côté d'un angle constant dont le sommet décrit la circonférence* O, *et dont l'autre côté passe par le point* F, *est une conique à centre.*

2. *Si l'on fait varier la grandeur de cet angle, toutes les coniques que l'on obtient sont semblables et ont le point* F *pour foyer commun.*

3. *Ces coniques ont pour enveloppe le cercle donné qui les touche chacune, doublement.*

4. *Les directrices correspondantes au foyer* F *passent par un même point.*

5. *Le lieu des seconds foyers est une circonférence concentrique à la circonférence donnée.*

Démonstration. — 1. Rappelons une propriété des coniques à centre : le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer d'une conique à centre sur les tangentes à la courbe est une circonférence décrite sur l'axe focal de la conique, comme diamètre.

Inversement, si par un point F on mène un rayon vecteur FA à une circonférence donnée, et si l'on tire AB perpendiculaire à FA, la droite AB touchera constamment une section conique, ayant le point F pour foyer, et qui sera une ellipse ou une hyperbole, selon que le point F sera intérieur ou extérieur au cercle.

Cela posé, soit α l'angle constant dont le sommet A décrit la circonférence donnée O, et dont l'un des côtés passe constamment par le point donné F. Abaissons de ce point fixe F une perpendiculaire FB sur le second côté de l'angle. Le pied B de cette perpendiculaire décrit une circonférence quand le point A parcourt la circonférence donnée O. Car l'angle AFB est invariable, et le rapport $\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FA}}$ est constamment égal à $\sin\alpha$. Il en résulte que le point B décrit une circonférence dont le centre O′ est sur une droite FO′, faisant avec FO un angle

$$\mathrm{OFO'} = \mathrm{AFB} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

et à une distance de F égale à $\mathrm{OF} \times \sin\alpha$. Le rayon R′ de cette circonférence est égal à $\mathrm{R}\sin\alpha$, en désignant par R le rayon de la circonférence donnée O.

On voit donc que l'enveloppe des droites AB n'est autre que l'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs menés d'un point fixe F aux différents points d'une circonférence O′. D'après le théorème

que nous avons rappelé, cette enveloppe est une conique à centre ayant pour foyer le point F. Ce sera une hyperbole si le point F est extérieur au cercle O′, et une ellipse si le point F est intérieur.

Selon que le point F est extérieur ou intérieur au cercle O′, ce point est extérieur ou intérieur au cercle donné O. Car les égalités

$$FO' = FO.\sin\alpha, \quad \text{et} \quad R' = R\sin\alpha$$

donnent

$$\frac{FO}{R} = \frac{FO'}{R'};$$

on a donc

$$FO > R, \quad \text{ou} \quad FO < R,$$

selon que FO′ est plus grand ou plus petit que R′.

Ainsi, l'enveloppe de la droite AB est une hyperbole si le point F est extérieur au cercle donné O, et une ellipse si le point F est intérieur à ce cercle.

Après avoir fait cette distinction entre les coniques, il est naturel de se demander comment s'effectue le passage de l'hyperbole à l'ellipse.

A cet égard, étudions le cas où le point F est situé sur la circonférence donnée O.

On a alors

$$\frac{FO}{R} = 1, \quad \text{et par suite} \quad \frac{FO'}{R'} = 1;$$

ce qui fait voir que le point F est aussi sur la circonférence O′. Les droites AB passeront toutes par le point F′ diamétralement opposé à F sur la circonférence O′. La droite BF′, pour une position particulière, se confond avec le diamètre FO′F′. Dans une autre position, elle se place en F′. On peut donc considérer la droite FF′ comme

l'enveloppe des droites BF′ (*); et cette droite elle-même peut être regardée, soit comme une ellipse infiniment aplatie, soit comme une hyperbole infiniment allongée. Dans tous les cas, les points F, F′ sont à la fois les foyers et les sommets de cette *conique limite.* On pouvait prévoir que les foyers doivent, dans le cas où F est sur la circonférence O, coïncider avec les sommets; car on a alors

$$\frac{\mathrm{FO'}}{\mathrm{R'}} = 1,$$

et $\frac{\mathrm{FO'}}{\mathrm{R'}}$ représente l'excentricité de la conique. On voit de même que la conique enveloppe a un centre.

Remarque. — La proposition que nous venons de démontrer n'est que la réciproque de cette proposition connue : *le lieu des pieds des obliques menées de l'un des foyers d'une conique à centre sur les tangentes, et sous une inclinaison constante, est une circonférence dont le centre est un point du second axe de la conique.*

Tout ce que nous avons dit se déduit immédiatement de ce théorème.

2. *Si l'on fait varier la grandeur de l'angle* α, *toutes les coniques que l'on obtient sont semblables et ont le point* F *pour foyer commun.*

En effet, nous venons de voir que le rayon du cercle O′ est $\mathrm{R}\sin\alpha$; de plus

$$\mathrm{FO'} = \mathrm{FO}.\sin\alpha = d\sin\alpha.$$

(*) On sait d'ailleurs qu'un système de deux points peut être considéré comme une conique et que dans ce cas les tangentes à la conique sont toutes les droites passant par l'un de ces points (*voir* le *Traité des Sections coniques* de M. Chasles, p. 32, n° 32).

Cette note est de M. Saacké.

On a donc, en nommant $2a$, $2b$ les axes et $2c$ la distance des foyers,

$$a = R\sin\alpha, \quad c = d\sin\alpha.$$

Ces formules montrent tout d'abord que l'excentricité $\frac{c}{a}$ est indépendante de α.

En outre, de l'égalité

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{d^2}{R^2}$$

on déduit

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{d^2 - R^2}{R^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2 - R^2}{R^2}.$$

Les axes étant proportionnels, les coniques sont semblables. Il résulte de la démonstration du théorème I qu'elles ont toutes pour foyer le point F.

3. Lorsque le point F est extérieur au cercle donné O, les coniques ont pour enveloppe la circonférence O, qui les touche chacune en deux points. Considérons l'hyperbole enveloppée par la droite AB, lorsque le sommet A de l'angle constant parcourt la circonférence O. Quel que soit l'angle α, il y a sur l'hyperbole un point D tel, qu'en ce point le rayon vecteur fait avec la tangente un angle égal à α. Ce point appartient évidemment à la circonférence donnée. Dès lors, la circonférence et l'hyperbole ont le point D commun, et comme ces deux courbes ne peuvent pas se couper, elles sont évidemment tangentes en ce point. Le même raisonnement s'appliquant aux deux branches de l'hyperbole, on voit qu'il y a deux points de contact symétriques, par rapport au second axe de la conique.

Ces coniques, extérieures au cercle, lui étant doublement tangentes, le cercle est leur enveloppe.

Remarque. — Lorsque le point F est dans l'intérieur du cercle donné, les coniques que l'on obtient en faisant varier α ne sont pas toutes doublement tangentes au cercle. Pour s'en assurer, il suffit de supposer que le point F coïncide avec le centre O du cercle donné. Car, dans ce cas, les coniques deviennent des circonférences concentriques au cercle donné. Mais, en admettant que F soit intérieur au cercle O, nous allons déterminer à partir de quelle valeur de α les ellipses enveloppes cessent d'être tangentes à la circonférence donnée.

Menons le rayon vecteur FA perpendiculaire à OF, et par le point A où il rencontre la circonférence O conduisons une tangente AB à cette circonférence. L'angle aigu FAB sera évidemment le minimum des angles que les rayons vecteurs menés de F aux différents points de la circonférence forment avec les tangentes en ces points. Il s'ensuit que les coniques correspondantes à des valeurs de l'angle α moindres que l'angle FAB ne peuvent être tangentes à la circonférence O; car, s'il y avait un point de contact, la tangente en ce point à la conique qui serait aussi tangente au cercle, ferait avec le rayon vecteur un angle α moindre que FAB, ce qui est impossible.

4. *Les directrices correspondantes au foyer* F *passent par un même point.*

Pour une valeur particulière de α, l'axe focal de la conique est dirigé suivant la droite FO′, et le second axe suivant la droite OO′ perpendiculaire à FO′ au point O′. On a

$$a = R' = R\sin\alpha, \quad c = d\sin\alpha, \quad \frac{b^2}{c} = \left(\frac{R^2 - d^2}{d}\right)\sin\alpha.$$

La directrice correspondant au foyer F est parallèle à O′O, et rencontre O′F en un point H dont la distance

à F est $\left(\frac{R^2 - d^2}{d}\right)\sin\alpha$. D'où

$$\frac{HF}{FO'} = \frac{R^2 - d^2}{d^2}.$$

Soit G le point où la directrice rencontre la droite FO, les triangles semblables FHG, FO'O donnent

$$\frac{FG}{FO} = \frac{HF}{FO'} = \frac{R^2 - d^2}{d^2}.$$

Donc, lorsqu'on fait varier α, les directrices correspondant au foyer F, rencontrent, toutes, la droite FO en un même point G.

5. *Le lieu des seconds foyers est une circonférence concentrique au cercle donné* O.

En effet, si F' est le second foyer, on aura

$$O'F' = O'F, \quad \text{par suite} \quad OF' = OF,$$

puisque OO' est perpendiculaire sur FO'. Donc, le lieu des seconds foyers F' est la circonférence décrite du point O comme centre avec OF pour rayon.

Note. — La même question a été résolue par MM. Paul Capin, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier, P. Cagny et Léon Blouet, élèves du lycée Charlemagne; Puel et A. Juncker.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE PAR M. GRIFFITHS;

(voir 2e série, t. IV, p. 522);

Par M. Léon BLOUET,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser).

Soient E_a, E_b, E_c les centres des cercles exinscrits à un triangle ABC; le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle des neuf points du triangle $E_a E_b E_c$.

Soit donc ABC le triangle donné, je construis les cercles exinscrits; leurs centres E_a, E_b, E_c sont donnés par l'intersection des droites AE_a, AE_b, AE_c bissectrices des deux angles extérieurs du triangle ABC en A et de l'angle BAC, avec les bissectrices des autres angles. Tirons les trois lignes $E_a E_b$, $E_a E_c$, $E_b E_c$; ces droites passent par les sommets C, B, A.

En effet, $E_a E_b$ passe par C, puisque CE_b est la bissectrice de ACD adjacent à ACB, et que CE_a est la bissectrice de BCF, opposé au sommet à ACD.

Cela posé, pour démontrer que le cercle circonscrit à ABC est le cercle des neuf points du triangle $E_a E_b E_c$, il nous suffit de faire voir que AE_a est perpendiculaire sur $E_b E_c$; car, si cela existe, le cercle passera par les pieds des hauteurs du triangle $E_a E_b E_c$, et sera bien le cercle des neuf points de ce triangle. Remarquons pour cela que AE_a est la bissectrice de l'angle BAC, et que $E_c E_b$ est la bissectrice de l'angle CAK adjacent à BAC. Donc AE_a est perpendiculaire sur $E_b E_c$. Ce qu'il fallait démontrer.

Note. — Même solution par M. Deman, élève du lycée de Douai; Lacauchie, élève de l'institution Sainte-Barbe.

THÉORÈME SUR LA PARABOLE;

Par M. Armand LÉVY,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Metz.

Lemme. — Si d'un point M, pris sur un des côtés AB d'un triangle ABC conjugué à une conique, on mène des tangentes à cette courbe, les points β, γ, où les tangentes rencontrent l'un des deux autres côtés BC du triangle, sont conjugués harmoniques des sommets B, C situés sur ce côté.

En effet, le sommet C étant le pôle de AB, tout point de AB est conjugué harmonique de C, par rapport aux deux points où les tangentes menées de M rencontrent la droite qui unit C au point quelconque pris sur AB (*).

Théorème. — *Les droites qui unissent les milieux des côtés d'un triangle* ABC, *conjugué à une parabole, sont tangentes à cette courbe.*

En effet, la parabole est tangente à la droite de l'*infini*. Soient M le point où la droite de l'infini rencontre le côté AB, et γ le point où elle rencontre CB. La tangente menée par M sera une parallèle à AB, rencontrant BC en un point β, tel que β et γ soient conjugués harmoniques de B et de C. Mais γ étant à l'infini, β est au milieu de BC; donc le théorème est démontré (**).

(*) La polaire de M passant par le point C, les quatre droites MC, MB, $M\gamma$, $M\beta$ forment un faisceau harmonique dont MB, MC sont deux rayons conjugués.

(**) La tangente menée à la parabole, parallèlement à la polaire AB de C, est à égale distance de AB et de C. Le point de contact se trouve à l'intersection de la courbe et du diamètre conduit par le pôle C. C'est là

Remarque. — On en déduit le théorème démontré par M. Painvin : le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle, est le cercle des neuf points de ce triangle.

Car la parabole est tangente aux côtés du triangle dont les sommets sont aux milieux des côtés du triangle donné; donc, d'après une proposition démontrée dans les *Nouvelles Annales* (1845, p. 245), le lieu des foyers est le cercle circonscrit au second triangle, c'est-à-dire le cercle des neuf points du triangle proposé.

SOLUTION DE LA QUESTION D'EXAMEN

(voir 2e série, tome IV, page 476);

PAR M. P. MARQUES BRAGA,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant.)

Voici une solution purement géométrique (s'appuyant seulement sur les deux premiers livres de la Géométrie) de la question d'examen de la page 476 du tome IV de la deuxième série :

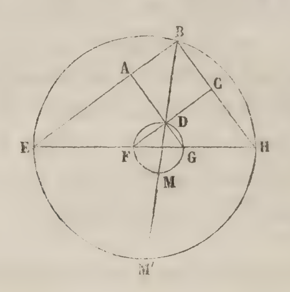
Construire un carré ABCD *dont les côtés prolongés coupent une droite donnée en quatre points* E, F, G, H (E *sur* BA, F *sur* CD, G *sur* AD, H *sur* BC).

Les points B, D se trouvent sur des demi-circonférences décrites sur EH, FG comme diamètres. La diagonale BD partageant les angles B et D en deux parties égales, passe par les milieux M, M' des demi-circonférences. Donc,

---

une conséquence toute simple de cette proposition bien connue, que la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact, quand la courbe est rapportée à une tangente, et au diamètre mené par le point de contact. G.

si, après avoir décrit les demi-circonférences, on joint leurs milieux, la droite ainsi menée déterminera les points



B et D, par suite les points A et C seront déterminés.

La solution serait la même si les quatre points n'étaient pas en ligne droite.

QUESTIONS.

766. Les deux ellipses de Cassini données par les équations

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 = b^4,$$
$$(x^2+y^2)^2 - 2a'^2(x^2-y^2) + a'^4 = b'^4$$

se coupent orthogonalement, pourvu qu'on ait

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$

(STREBOR.)

767. Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers (*) inscrits dans une ellipse, ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.

(*) Un polygone semi-régulier est la projection d'un polygone régulier, dénomination due à M. Transon (*voir* 2e série, t. II, p. 317).

Le lieu de leurs centres est une ellipse. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre.

(Fouret.)

768. Étant donnés une conique et un point dans son plan, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle circonscrit à cette conique et tel, que les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent au point donné; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les cercles analogues ont le même centre radical.

Le lieu de leurs centres est une conique. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre.

(Fouret.)

769. Nommons secteur en général le corps terminé d'une part par une surface conique, de l'autre par une surface quelconque que nous appellerons la *base du secteur*. Tous les secteurs ayant une base commune et des volumes égaux ont leurs sommets situés dans un même plan. (Zeuthen.)

770. Le plan dont il est parlé dans la question précédente est perpendiculaire à deux plans sur lesquels l'aire de la projection du périmètre de la base commune est nulle. (Louis Oppermann, de Copenhague.)

771. Sur toutes les tangentes d'une courbe quelconque S, et à partir du point de contact M, on prend une longueur constante MM_1. La normale à la courbe S_1, lieu des points M_1, passe par le centre de courbure O de la courbe S au point M. Sur la normale $M_1 O$ et au point O élevons une perpendiculaire qui coupe la tangente MM_1 au point T. La droite CT, qui joint le point T au centre de courbure C de la développée de S au point M, coupe

la normale M_1O au point O_1 qui sera le centre de courbure de S_1 au point M_1. (NICOLAÏDÈS.)

772. Le nombre des sommets (*) d'une courbe algébrique est, en général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i, c, d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques. (LAGUERRE.)

773. Étant donnée une équation réciproque $f(x) = 0$, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en z, obtenue en posant

$$x + \frac{1}{x} = z$$

soit elle-même réciproque?

774. Démontrer que si X_n^m désigne le nombre de manières de décomposer un polygone convexe, de m côtés en n parties, au moyen de $n-1$ diagonales qui ne se coupent pas dans l'intérieur du polygone on a

$$X_n^m = \frac{1}{n} \times \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-1)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

P.

(*) Les sommets sont les points où la courbure est maximum ou minimum.

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 289);

Par M. H.-G. ZEUTHEN (de Copenhague).

VII. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée et des contacts du premier ordre avec deux autres courbes.*

29. Désignons par $(C_{m,n})^r$ la condition d'un contact de l'ordre r avec la courbe $C_{m,n}$; le système actuel sera représenté par $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}]$. A ce système appartient toute conique infiniment aplatie :

1° Passant par un point d'intersection de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2}, tangente à $C_{m,n}$ et limitée au point d'intersection et au point du contact;

2° Tangente à $C_{m,n}$ à son point de rencontre avec une des deux autres courbes, et limitée à ce point et à la troisième courbe;

3° Renfermée dans une tangente commune à $C_{m,n}$ et à l'une des deux autres courbes, limitée au point de contact avec $C_{m,n}$ et par la troisième courbe;

4° Renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par les deux autres courbes;

5° Passant par un point de rebroussement de $C_{m,n}$, limitée à ce point et à un point de rencontre de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2};

6° Passant par un point de rebroussement de $C_{m,n}$, tangente à l'une des deux courbes C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2}, termi-

née à l'autre de ces deux courbes et au point de rebroussement.

Nous ne savons pas encore combien de fois on doit compter chacune de ces coniques singulières dans le nombre λ, mais nous leur attribuons les coefficients indéterminés x, y, z, u, v et s correspondant respectivement aux différentes classes que nous venons de nommer. Ces coefficients seront entiers et positifs (*) ; on trouve alors :

$$\begin{aligned}\lambda &= x.m_1m_2n + y(mm_1m_2 + mm_2m_1) + z(nn_1m_2 + nn_2m_1)\\ &\quad + u.t'm_1m_2 + v.d'm_1m_2 + s(d'n_1m_2 + d'n_2m_1)\\ &= (xn + 2ym + ut' + vd')\,m_1m_2 + (zn + sd')(m_1n_2 + m_2n_1).\end{aligned}$$

Si l'on transforme, au moyen du principe de dualité, une figure contenant deux courbes qui ont un contact de l'ordre r ou $(r+1)$ points consécutifs communs, les courbes réciproques auront en commun $r+1$ tangentes consécutives, c'est-à-dire un contact du même ordre. Si l'on transforme le système actuel, le système réciproque sera donc de la même espèce. Par conséquent on peut (comme aux n°s 11 et 12) trouver ϖ en permutant, dans l'expression de λ, les lettres m et n, d et t, d' et t'. On trouve alors

$$\varpi = (xm + 2yn + ud' + vt')\,n_1n_2 + (zm + st')(m_1n_2 + m_2n_1),$$

(*) La supposition que les coefficients sont plus grands que zéro, implique celle que le système contient vraiment toutes les classes nommées de coniques infiniment aplaties. Nous ne profiterons de cette supposition que pour la deuxième ou la quatrième classe, c'est-à-dire pour le coefficient y ou u; car alors les équations indéterminées que nous trouverons n'accorderont la valeur zéro à aucun autre coefficient. Il suffit donc de s'assurer : 1° que le système ne contient pas d'autres coniques infiniment aplaties que celles que nous avons nommées, et 2° qu'il en contient vraiment de la deuxième ou de la quatrième classe. Ceci est bien évident, notamment pour la quatrième.

puis, au moyen des formules (1) et (2) du n° 1,

$$\mu = \mu''' m_1 m_2 + \mu'' (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,$$
$$\nu = \nu''' m_1 m_2 + \nu'' (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2,$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}(xm + 2yn + ud' + vt'),$$

$$\mu'' = \frac{1}{3}[z(m + 2n) + s(2d' + t')],$$

$$\mu''' = \frac{2}{3}(2ym + xn + vd' + ut'),$$

$$\nu' = \frac{2}{3}(xm + 2yn + ud' + vt'),$$

$$\nu'' = \frac{1}{3}[z(2m + n) + s(d' + 2t')],$$

$$\nu''' = \frac{1}{3}(2ym + xn + vd' + ut'),$$

30. Pour le calcul des coefficients indéterminés on a (*voir* le n° 13)

$$\mu'' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p_1, p_2, l] = \nu',$$
$$\mu''' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p, l_1, l_2] = \nu''.$$

La première de ces équations donne

$$(2x - z)m + 2(2y - z)n + 2(u - s)d' + (2v - s)t' = 0,$$

ou, comme $d' = 3m - 3n + t'$ (*),

$$[2x - z + 6(u - s)]m + 2[2y - z - 3(u - s)]n + [2v - s + 2(u - s)]t' = 0.$$

Comme les trois nombres m, n et t' ne peuvent être liés

(*) *Voir* la formule IV dans la première note du n° 11.

par aucune équation, leurs coefficients doivent être égaux à zéro. On trouve donc

$$(I) \quad z - 2x = 2(2y - z) = 3(s - 2v) = 6(u - s).$$

L'équation $\mu''' = \nu''$ donne les mêmes résultats.

Pour achever le calcul des coefficients inconnus, nous déterminerons par d'autres moyens μ' dans le cas particulier où la courbe $C_{m,n}$ étant de l'ordre m a un point multiple de l'ordre $m-1$. Dans ce point coïncident $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, et la courbe ne contient pas d'autres points doubles ni points de rebroussement (*). Par conséquent

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \quad d' = 0$$

et selon les équations de M. Plücker

$$n = 2(m-1), \quad t = 2(m-2)(m-3), \quad t' = 3(m-2).$$

Nous désignerons par M cette courbe singulière que nous aurons à considérer aussi dans d'autres questions. Alors nous ferons toujours usage du *lemme* suivant.

31. Lemme. — *Un système de coniques qui ont un contact de l'ordre r avec une courbe M de l'ordre m douée d'un point multiple de l'ordre $m-1$, si nous désignons par q le nombre des points où une conique coupe la courbe* (**), *par α le nombre des coniques du*

(*) Nous supposons qu'aucun des points doubles qui coïncident ne se réduit à un point de rebroussement.

(**) q est en général égal à $2m-(r+1)$. Seulement dans le cas où les coniques ont avec $C_{m,n}$ d'autres contacts que celui de l'ordre r, il faut encore soustraire de ce nombre-ci, les points d'intersection qui coïncident avec les autres points de contact. Du reste, nous n'avons donné à

système dont le contact a lieu en un point donné, par β *le nombre de celles qui coupent* M *en un point donné, contient* $q\alpha + \beta$ *coniques dont le point de contact coïncide avec un des* q *points d'intersection (si l'on n'a pas égard à la coïncidence qui a lieu lorsqu'une conique touche et coupe au point multiple différentes branches de* M).

Pour le prouver, on joint le point multiple par une droite X au point de contact θ d'une conique, et par des droites Y à ses points d'intersection p. Toute droite X ou Y détermine un seul point θ ou p et réciproquement. La coïncidence d'un point de contact θ avec un point d'intersection p de la même conique dépend donc de la coïncidence d'une droite X avec une droite correspondante Y.

Or, à une droite X ou à un point θ correspondent α coniques du système, et par conséquent $q\alpha$ points p ou $q\alpha$ droites Y, et à une droite Y ou à un point p correspondent β coniques, et par conséquent β points θ ou β droites X. Donc (théorème II, p. 195), $q\alpha + \beta$ droites X coïncident avec des droites correspondantes Y, d'où l'on conclut le lemme énoncé.

Si la conique dont un point de contact θ coïncide avec un point d'intersection p n'est pas infiniment aplatie, l'ordre du contact s'élève à $r+1$. Mais si elle est infiniment aplatie, les points θ et p qui coïncident peuvent appartenir l'un à l'une, et l'autre à l'autre des deux branches coïncidant de la conique, et alors l'ordre du contact restera le même.

32. Appliquons le lemme 31 au système (M, p_1, p_2, p_3),

---

notre lemme que la généralité nécessaire pour les applications, en omettant par exemple le cas facile où les coniques ont plusieurs contacts de l'ordre r.

où (*)

$$r = 1,\quad q = 2m - 2,$$
$$\alpha = N(M\theta, p_1, p_2, p_3),$$
$$\beta = N(M - p, p_1, p_2, p_3),$$

ou, selon la formule II du n° 23,

$$\beta = N(M, p, p_1, p_2, p_3) - 2N(M\theta, p_1, p_2, p_3),$$

et, par conséquent,

$$q\alpha + \beta = 2(m-2)N(M\theta, p_1, p_2, p_3) + N(M, p, p_1, p_2, p_3).$$

Or, d'après les formules (8) et (3) (**),

$$N(M\theta, p_1, p_2, p_3) = 1,$$
$$N(M, p, p_1, p_2, p_3) = 2m + n,$$

ou, comme $n = 2(m-1)$ (n° 30),

$$N(M, p, p_1, p_2, p_3) = 4m - 2.$$

Par conséquent,

$$q\alpha + \beta = 6(m-1).$$

Le système ne contient aucune conique infiniment aplatie. $q\alpha + \beta$ sera donc le nombre $N[(M)^2, p_1, p_2, p_3)$ des coniques qui passent par p_1, p_2, p_3 et ont avec M un contact du second ordre. On trouve pour le même nombre une autre expression, en remplaçant dans celle que nous

---

(*) *Voir* les notations du n° 23.

(**) La coïncidence des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles de $C_{m,n}$, ne modifie pas les caractéristiques des systèmes, tant que les coniques n'ont pas plus de deux contacts avec cette courbe; car alors on ne regarde jamais à la fois plus de deux branches qui se coupent au même point. Les formules précédentes, (6) et (7) exceptées, sont donc encore vraies dans le cas où la courbe $C_{m,n}$ est remplacée par la courbe M. (*Voir* le n° 22.)

avons trouvée pour μ' dans le n° 29 (*), n par $2(m-1)$, d' par o, et t' par $3(m-2)$; ce qui donne

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}[(x+4y+3o)m - (4y+6o)].$$

En égalant les deux expressions de $q\alpha + \beta$, on trouve

$$(x+4y+3v-18)m - (4y+6v-18) = 0.$$

m étant arbitraire, on doit avoir séparément,

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x+4y+3v = 18, \\ 2y+3v = 9. \end{cases}$$

33. Les équations (I) du n° 30 et (II) du n° 32 suffisent à déterminer les coefficients x, y, z, u, v, s, qui doivent être entiers et positifs. Sous cette condition la seconde équation (II) n'est satisfaite que par

$$y = 3, \quad v = 1.$$

Puis les autres équations donnent (**),

$$x = 3, \quad z = 6, \quad u = s = 2.$$

Par la substitution de ces valeurs dans les expressions trouvées au n° 29, on obtient la solution (***) suivante :

$$(11a) \begin{cases} \mu' = \nu''' = 3n + d' = 3m + t', \\ \nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 2(3n + d') = 2(3m + t'), \end{cases}$$

$$(11b) \begin{cases} [(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}] \equiv [(\mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2, \\ \qquad \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2] \\ [(C_{m,n})^2, p_1, p_2] \equiv (\mu', \nu'), \\ [(C_{m,n})^2, p, l] \equiv (\mu'', \nu''), \\ [(C_{m,n})^2, l_1, l_2] \equiv (\mu''', \nu'''). \end{cases}$$

(*) *Voir* la note précédente.

(**) $y = 0$ donnerait $v = 3$, puis $u = 0$, ce qui justifie la remarque faite dans la note du n° 29.

(***) M. Cremona l'a trouvée d'une autre manière (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 7 novembre 1864).

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, les formules (11 a) sont remplacées par

$$(11c)\qquad \begin{cases} \mu' = \nu''' = 3m(m-1), \\ \nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 6m(m-1). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, $\mu' = \nu''' = 6$, $\nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 12$.

34. Il faut retenir pour la solution d'autres problèmes les valeurs des coefficients x, y, z, u, ν et s. Dans l'expression de λ ces coefficients appartiennent aux différentes espèces de coniques infiniment aplaties que nous avons énumérées au n° 29, et dans l'expression de ϖ ils doivent appartenir aux différentes espèces de coniques à point double, qui y sont corrélatives; ce qui donne lieu aux propositions suivantes :

Pour un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée $C_{m,n}$, *et des contacts du premier ordre avec deux autres courbes* C_{m_1,n_1}, *et* C_{m_2,n_2}, *il faut compter, dans le nombre* λ :

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie passant par un point d'intersection de* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2}, *tangente à* $C_{m,n}$ *et limitée au point d'intersection et au point de contact;*

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie, tangente à* $C_{m,n}$ *en un point de rencontre avec une des deux autres courbes, limitée à ce point et à la troisième courbe;*

Six fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente commune à* $C_{m,n}$ *et à l'une des deux autres courbes, limitée au point de contact avec* $C_{m,n}$ *et à la troisième courbe;*

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$, *limitée par* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Une fois, *une conique infiniment aplatie, limitée à un*

point de rebroussement de $C_{m,n}$ *et à un point de rencontre de* C_{m_1,n_1} *avec* C_{m_2,n_2};

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie, limitée à un point de rebroussement de* $C_{m,n}$, *tangente à l'une et limitée à l'autre des deux courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Et, dans le nombre ϖ :

Trois fois, *toute conique à point double, composée d'une tangente commune à* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *et de la tangente à* $C_{m,n}$ *en l'un des points où elle est rencontrée par la première droite;*

Trois fois, *toute conique à point double, composée d'une tangente commune à* $C_{m,n}$ *et à l'une des deux autres courbes, et d'une tangente à l'autre menée par le point où la première droite touche* $C_{m,n}$;

Six fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* $C_{m,n}$ *en l'un des points d'intersection avec l'une des courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *et d'une tangente menée par le même point à l'autre;*

Deux fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de tangentes menées par ce point aux deux autres courbes;*

Une fois, *toute conique à un point double composée d'une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et d'une tangente commune à* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Deux fois, *toute conique à point double composée d'une tangente d'inflexion à* $C_{m,n}$, *et d'une tangente menée à l'une des courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *par un point de rencontre de l'autre avec la première droite.*

VIII. — *Détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du second ordre et deux du premier ordre avec deux ou avec une seule courbe données.*

35. Ces systèmes sont :

1° $[(C_{m,n})^2, 2C_{m_1,n_1}]$;

2° $[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, C_{m_1,n_1}]$, dont les coniques ont deux contacts avec la courbe $C_{m,n}$, l'un du second et l'autre du premier ordre, et un contact du premier ordre avec C_{m_1,n_1};

3° $[(C_{m,n})^2, 2C_{m,n}]$ dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ trois contacts l'un du second et les deux autres du premier ordre.

Les théorèmes du n° 34 sont encore vrais pour ces systèmes, où deux ou trois courbes données coïncident; mais outre les coniques singulières nommées dans les énoncés de ces théorèmes, il y en a d'autres qui sont propres aux deux derniers systèmes.

36. On trouve pour le système $[(C_{m,n})^2, 2C_{m_1,n_1})$

$$\lambda = 3.d_1 n + 3mm_1(m_1 - 1) + 6.nn_1(m_1 - 2)$$
$$+ 2.t'\frac{m_1(m_1 - 1)}{2} + 1.d'd_1 + 2.d'n_1(m_1 - 2),$$

$$\varpi = 3.t_1 m + 3.nn_1(n_1 - 1) + 6.mm_1(n_1 - 2)$$
$$+ 2.d'\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + 1.t't_1 + 2.t'm_1(n_1 - 2).$$

Puis, on trouve, comme à l'ordinaire, les valeurs de μ et ν qui, réduites au moyen des formules de M. Plücker,

deviennent

$$(12a)\ (*)\quad \begin{cases} \mu = (3n + d')(m_1^2 + 2m_1 n_1 - 5m_1 + t_1), \\ \nu = (3n + d')(n_1^2 + 2m_1 n_1 - 5n_1 + d_1), \end{cases}$$

qu'on peut substituer dans la relation

$$(12b)\qquad [(C_{m,n})^2,\ 2C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} sont des courbes générales des ordres m et m_1, on doit remplacer $(12a)$ par

$$(12c)\quad \begin{cases} \mu = \frac{3}{2} m(m-1) m_1 (m_1 - 1)(m_1^2 + 3m_1 - 8), \\ \nu = 3m(m-1) m_1 (m_1 - 1)(m_1^2 + m_1 - 5). \end{cases}$$

Pour $m = m_1 = 2$, on trouve $\mu = \nu = 12$.

37. Dans le système $[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, C_{m_1,n_1}]$, on trouve, à côté des coniques infiniment aplaties nommées au n° 34, d'autres qui sont renfermées dans les tangentes d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitées aux points d'inflexion et à C_{m_1,n_1}. Introduisons-les dans l'expression de λ avec le coefficient x, et nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda = {} & 3.mm_1(n-2) + 3.[mm_1(m-2) + 2dm_1] \\ & + 6.[nn_1(m-2) + 2tm_1] + 2.t'(m-3)m_1 \\ & + 1\, d'mm_1 + 2[d'(n-3)m_1 + d'n_1(m-2)] + x.t'm_1. \end{aligned}$$

Puis, le principe de dualité donne :

$$\begin{aligned} \varpi = {} & 3.nn_1(m-2) + 3.[nn_1(n-2) + 2tn_1] \\ & + 6.[mm_1(n-2) + 2dn_1] + 2.d'(n-3)n_1 \\ & + 1.t'(nn_1 + 2.[(t'm-3)n_1 + t'm_1(n-2)] + x.d'n_1. \end{aligned}$$

(*) Ces formules résultent aussi des formules (4) et (11) au moyen de méthodes données par MM. Chasles et Cremona (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 août et 7 novembre 1864).

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1,$$
$$\nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1.$$

Nous nous contenterons, pour le moment, de déterminer μ'' et ν'. Leurs expressions, au moyen des formules de M. Plücker, seront

$$\mu'' = 3(m+n)(m+n-4) + (t'+d')(m+n-12) + \frac{2}{3}(x-5)t',$$
$$\nu' = 3(m+n)(m+n-4) + (t'+d')(m+n-12) + \frac{2}{3}(x-5)d'.$$

Or, on prouve, comme à l'ordinaire, que

$$\mu'' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, \mathrm{C}_{m,n}, p, l] = \nu';$$

donc

$$x = 5.$$

En introduisant cette valeur dans les expressions de λ et ϖ, et continuant la détermination et la déduction de μ et ν, on trouve la solution suivante du problème actuel :

$$(13a)\,(*)\quad\begin{cases}\mu' = 3(2mn+n^2+4m-10n)+2(m+n-14)d',\\ \mu''=\nu' = 2(3n+d')(m+n-12)+24(m+n),\\ \nu'' = 3(m^2+2mn-10m+4n)+(m+2n-14)t';\end{cases}$$

(*) Les formules (13 a) donnent la simple relation

$$\mu' - \nu'' = md' - nt'.$$

La dissymétrie des valeurs de μ'' et ν' n'est qu'apparente, car selon la formule (IV) de la première note du n° 11

$$3n + d' = 3m + t'.$$

$$(13b)\quad \begin{cases} [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\ \nu'' m_1 + \nu' n_1), \\ [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ p] \equiv (\mu',\ \nu'), \\ [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ l] \equiv (\mu'',\ \nu''), \end{cases}$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'orde m, on doit remplacer (13 a) par

$$(13c)\quad \begin{cases} \mu' = 3m(m-2)(m^2+2m-7), \\ \mu'' = \nu' = 6m(m-2)^2(m-3), \\ \nu'' = 3m(m-2)(2m^2+m-7). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on trouve $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 0$.

38. Pour le coefficient x qui appartient dans λ à la nouvelle espèce de coniques infiniment aplaties, et dans ϖ aux coniques corrélatives à point double, nous avons trouvé la valeur 5. Donc :

Pour un système de coniques qui ont deux contacts avec une courbe $C_{m,n}$, *l'un du second et l'autre du premier ordre, et un contact du premier avec une autre courbe donnée* C_{m_1,n_1}, *on doit compter :*

Dans le nombre λ : Cinq fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et limitée au point d'inflexion et à* C_{m_1,n_1};

Et dans le nombre ϖ : Cinq fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente de rebroussement et d'une tangente à* C_{m_1,n_1}.

Ces théorèmes sont encore vrais si $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident.

39. Le système $[(C_{m,n})^2,\ 2C_{m,n}]$ ne contient de coniques singulières que celles qui sont nommées aux

n°s 34 et 38. Donc :

$$\lambda = 3.d(n-4) + 3.2d(m-3) + 6.2t(m-4) + 2.t'\frac{(m-3)(m-4)}{2} + 1.d'd + 2.d'(n-3)(m-4) + 5.t'(m-3),$$

$$\varpi = 3.t(m-4) + 3.2t(n-3) + 6.2d(n-4) + 2d'\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1.t't + 2.t'(m-3)(n-4) + 5.d'(n-3),$$

d'où

$$(14a)\quad \begin{cases} \mu = (2m+n-7)[6t+d'(n-3)] \\ \qquad + [(m-n)(m+n-5)+t](3n+d'-36) \\ \qquad + 12(m-n)(m+n-3), \\ \nu = (m+2n-7)[6d+t'(m-3)] \\ \qquad + [(n-m)(m+n-5)+d](3m+t'-36) \\ \qquad + 12(n-m)(m+n-3); \end{cases}$$

$$(14b)\qquad [(C_{m,n})^2,\ 2C_{m,n})] \equiv (\mu,\ \nu).$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(14c)\quad \begin{cases} \mu = \frac{3}{2}m(m-2)(m-3)(m^3+6m^2-9m-46), \\ \nu = 3m(m-2)(m-3)(m^3+4m^2-8m-23). \end{cases}$$

Pour $m = 2$ ou $m = 3$ on trouve $\mu = \nu = 0$.

(La suite prochainement.)

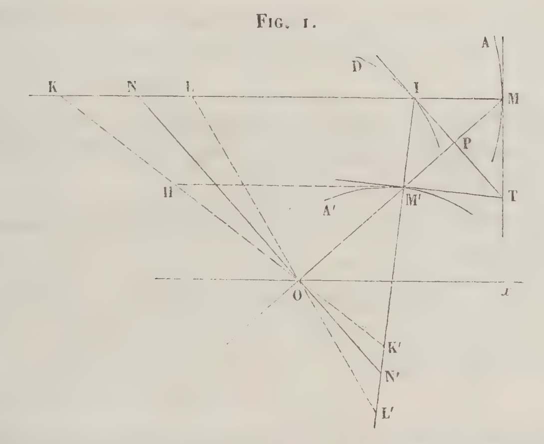
SUR LA TRANSFORMATION DES LIGNES PLANES PAR LA MÉTHODE DES RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. E. HABICH,
Directeur de l'École supérieure polonaise.

Soient A une ligne plane donnée, A′ sa réciproque, O le pôle de transformation; on a

(1) $$rr' = \pm a^2.$$

FIG. 1.



Menons par les points correspondants M et M′ les tangentes MT et M′T et les normales MN et M′N′; on sait que

(2) $$\text{OMT} + \text{OM'T} = 180^\circ,$$
$$\text{MM'T} = \text{M'MT} \quad \text{et} \quad \text{NMO} = \text{N'M'O}.$$

Supposons en premier lieu que la puissance de transformation a^2 soit positive.

En prolongeant la normale $M'N'$ jusqu'à son intersection avec la normale MN en I, les tangentes en M et M' jusqu'à leur intersection en T, et joignant T avec I, on trouve

$$MI = M'I, \quad MT = M'T \quad \text{et} \quad MP = M'P.$$

On voit par là que la ligne D, lieu géométrique des points tels que I, a tous ses points à égale distance de la courbe A et de sa réciproque A', que la droite IT perpendiculaire à MM', et passant par son milieu P, est tangente à la ligne D en I, et que le point P appartient à la podaire de cette ligne relative à l'origine O.

$$OP = p = \frac{r + r'}{2}.$$

Les lignes A et A' sont les enveloppes d'un cercle de rayon variable $MI = M'I = b$, dont le centre se déplace sur la courbe D.

Pour trouver la loi de variation du rayon b, soit $OI = R$, on a

$$(R + b)(R - b) = rr' = a^2;$$

d'où

$$(3) \qquad b^2 = R^2 - a^2.$$

C'est-à-dire que le rayon b est égal à la tangente menée du point I au cercle d'inversion.

On sait que le cercle d'inversion est un cercle tracé autour de l'origine O avec a pour rayon.

On remarquera que

$$(4) \qquad R > p = \frac{r + r'}{2} > \sqrt{rr'} = a.$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si la puissance devient nulle,

$r' = 0$, $p = \frac{r}{2}$, $b = R$, et la ligne D est le lieu des points également distants de l'origine O et de la courbe A.

Supposons, en second lieu, que la puissance de transformation soit négative et que l'on ait $rr' = -a^2$.

En faisant une construction semblable à celle qu'on a faite pour le cas de la puissance positive, on déterminera la ligne D et sa podaire.

Quant au rayon du cercle enveloppé, en observant que l'origine O est située à l'intérieur de ce cercle, on trouvera en valeur absolue

$$(5) \qquad (b + R)(b - R) = a^2 \quad \text{d'où} \quad b^2 = R^2 + a^2,$$

c'est-à-dire que le rayon b est égal à la distance du point I au point où la perpendiculaire à R élevée en O rencontre le cercle d'inversion.

Les lignes A et A' peuvent être déterminées au moyen de la podaire P et de la distance variable $PM = PM'$, qui, dans le premier cas, est égale à la longueur de la tangente menée de P au cercle d'inversion et, dans le second cas, à la distance de P au point où la perpendiculaire élevée en O à OP rencontre ce cercle.

De là résulte que, connaissant la ligne D ou sa podaire, l'origine O et le rayon a du cercle d'inversion, on peut trouver les lignes A et A'.

Remarque I. — Quand $a^2 = 0$, la courbe D est le lieu des points également distants de l'origine O et de la ligne A. On sait que, dans ce cas, la ligne A est la roulette du point O considéré comme lié invariablement à la courbe D lorsqu'on fait rouler cette courbe D sur une autre courbe fixe égale. On peut généraliser ce théorème.

Supposons que la ligne D soit le lieu des points éga-

lement distants de la ligne B et d'une autre ligne C : en faisant rouler la courbe D sur une autre courbe fixe égale, la ligne B, considérée comme liée invariablement à la courbe mobile D, aura pour enveloppe sur le plan fixe la ligne C, et réciproquement.

Remarque II. — Si on prend la ligne A pour anticaustique des rayons lumineux incidents, et la courbe D pour dirimante, la ligne A′ sera l'anticaustique des rayons réfléchis, et réciproquement.

Dans le cas de $a^2 = 0$, la ligne A′ se réduit à un point (foyer).

Applications. — Supposons que la ligne A soit un cercle $r = a\cos\theta$, a^2 étant la puissance de transformation, on trouve pour A′ une droite $r' = \frac{a}{\cos\theta}$, la podaire est une courbe du troisième degré, et la ligne D une parabole.

Si la puissance est négative, on a pour A′, $r' = -\frac{a}{\cos\theta}$, la podaire est une cissoïde, et la ligne D une parabole.

La remarque I nous montre que : *lorsqu'une parabole roule sur une parabole fixe égale, toutes les droites parallèles à la directrice ont pour enveloppes des cercles dont les centres sont au foyer de la parabole fixe; et réciproquement, les cercles ayant pour centre le foyer de la parabole mobile ont pour enveloppes des droites parallèles à la directrice de la parabole fixe.*

Supposons encore que la ligne A soit une strophoïde $r = \frac{a(1 + \sin\theta)}{\cos\theta}$. Si la puissance est positive, la réciproque est la strophoïde elle-même; la podaire est une droite $p = \frac{a}{\cos\theta}$, et la ligne D une parabole.

Si la puissance a^2 est négative $-a^2$, la réciproque A' est une strophoïde symétrique de A; la podaire est une courbe du quatrième degré $p = a \tang \theta$, et la ligne D son antipodaire, etc.

Dans les *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 144, M. Nicolaïdès a donné la relation

$$(6) \qquad \frac{n}{\rho} + \frac{n'}{\rho'} = 2;$$

n et n' sont les normales, ρ et ρ' les rayons de courbure de la ligne A et de sa réciproque A' aux points correspondants M et M' (*).

De cette relation nous allons en déduire une autre qui nous conduira à un théorème important; pour cela joignons le centre de courbure K de la ligne A correspondant au point M à l'origine O, et traçons par le point M' la parallèle M'H à la normale MN; cette parallèle viendra couper OK en H, et on aura

$$\frac{n}{\rho} = \frac{n'}{\mathrm{M'H}};$$

la relation deviendra

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\mathrm{M'H}} = \frac{2}{n'},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure de la réciproque* A' *est le conjugué harmonique du point* L' *déterminé sur la normale* M'N' *par la relation* M'L' = M'H.

En prolongeant OK jusqu'à son intersection avec la normale M'N' en K', on a l'angle L'ON' = l'angle N'OK';

(*) Nous supprimons ici une démonstration de ce théorème analogue à la seconde que M. Fouret en a donnée et que nous avons indiquée p. 169, note. P.

d'un autre côté, l'angle N′OM′ étant droit, on voit que le point K′ est le conjugué harmonique du point L′ par rapport aux points N′ et M′, donc ce point K′ est le centre de courbure de la réciproque A′ ; de là ce théorème remarquable :

Les centres de courbure de la ligne A *et de sa réciproque* A′ *se trouvent sur une même droite passant par l'origine.*

Lorsqu'on fait varier la puissance de transformation a^2, les courbes réciproques de la ligne A sont homothétiques; d'où cet autre théorème :

Les centres de courbure des lignes homothétiques correspondant à des points homologues se trouvent sur une même droite passant par le centre d'homothétie.

Et encore :

Le centre de similitude d'un système de lignes homothétiques est aussi centre de similitude de leurs développées, des développées de ces dernières, et ainsi de suite.

Exemple. — Développantes successives des cercles concentriques ayant toutes leurs origines sur un même rayon vecteur.

Le théorème sur la similitude des développées successives des lignes homothétiques peut être démontré directement en partant de l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires et en prenant pour pôle le centre de similitude.

Pour donner une application des considérations précédentes, je vais indiquer la solution du problème des tangentes et des centres de courbure des lignes projectives horizontales des courbes d'ombre dans la vis à filet triangulaire et dans le cas des rayons lumineux parallèles.

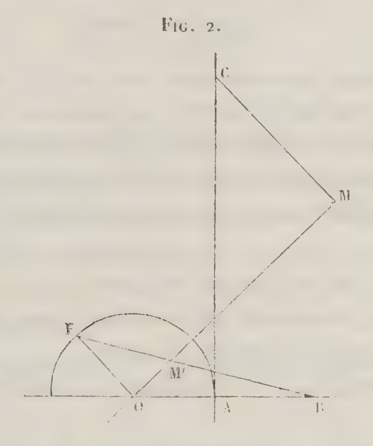
Pour cela considérons la courbe décrite par le sommet M de l'angle droit CMO, dont le côté indéfini MO passe constamment par un point fixe O, et dont l'autre côté MC $= b$ glisse par son extrémité C sur une droite fixe AC.

Soit OA $= a$, la plus courte distance de O à la droite AC. Prenons O pour pôle et OA pour axe polaire, on trouve

$$(1) \qquad \text{OM} = r = \frac{a + b \sin\theta}{\cos\theta} \quad (\theta = \text{MOA}).$$

La courbe déterminée par cette équation (1) est la

Fig. 2.



réciproque de la projection horizontale de la courbe d'ombre.

Pour le démontrer faisons OB $= b$, traçons autour de A comme centre avec OA $= a$ pour rayon une circonférence, élevons en O une perpendiculaire à OM et joignons par une droite le point E où cette perpendiculaire rencontre le cercle OA avec le point B; la droite EB viendra couper OM au point M′ qui appartient à la projection horizontale de la courbe d'ombre.

La construction précédente a été donnée par M. Poncelet (*).

On trouve aisément que

$$\mathrm{OM}' = r' = \frac{ab\cos\theta}{a + b\sin\theta} \quad \text{d'où} \quad rr' = ab.$$

Si $b = a$, c'est-à-dire si le point B coïncide avec A, on a $rr' = a^2$, et les points M et M′ se trouvent sur une même courbe (strophoïde) (**).

Enfin, lorsque $b = \infty$, $r' = a \operatorname{cotang}\theta$, et la réciproque de cette dernière ligne est évidemment

$$r = \operatorname{tang}\theta \times \text{const.}$$

Dans les deux derniers cas, lorsque $b = a$ et lorsque $b = \infty$, les courbes d'ombre (projections) sont décrites par le sommet de l'angle droit, et la considération de ce mouvement permet de trouver avec la plus grande facilité les normales, les centres de courbure, etc.

Dans le cas de $b \gtrless a$, on commencera par déterminer les normales, les centres de courbure, etc., de la réciproque M par la considération du mouvement, et on passera à la projection de la courbe d'ombre.

De cette manière, le problème se trouve résolu dans tous les cas.

Je terminerai en remarquant que les réciproques des coniques par rapport à un quelconque de leurs points pris pour origine sont des courbes du troisième degré de la

---

(*) *Voir :* PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, notes, p. 450 et 460; et DE LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive*, t. III, p. 136 et suiv.

(**) Dans les nombreux articles que j'ai eu occasion de lire sur cette courbe remarquable, je n'ai pas vu qu'on ait remarqué ce mode de génération.

forme

$$r = \frac{A}{\cos\theta} + B\cos(\theta - \alpha),$$

où A, B et α sont des paramètres.

Ces courbes appartiennent, d'après Newton, à deux classes distinctes : à la classe des hyperboles défectives à diamètre, et à la classe des hyperboles défectives sans diamètre.

SUR L'APPROXIMATION;

Par UN ABONNÉ.

Soit a une expression dont l'évaluation en décimales peut se pousser à un tel degré qu'on veut, et qui est une valeur approchée de A avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10^n}$.

I. Soit $A = a + \alpha$.

L'erreur relative sera $\frac{\alpha}{A}$, et, suivant l'hypothèse, nous avons

$$\pm \frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}.$$

Nous supposerons que A et a sont des quantités positives.

1° Soit $\alpha > 0$.

Prenons dans le développement de a, n chiffres à partir d'un premier significatif; soit a' le nombre qu'ils forment, de sorte que

$$a = a' + \varepsilon \quad \text{et} \quad A = a' + \alpha + \varepsilon.$$

On aura

$$\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon < 1,$$

en unités du dernier ordre de a'.

L'inégalité

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}$$

devient donc

$$\alpha < \frac{a' + \alpha + \varepsilon}{10^n};$$

d'où

$$\alpha\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < \frac{a' + \varepsilon}{10^n},$$

puis

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon}{10^n - 1}.$$

Si les n chiffres dont a' se compose ne sont pas des 9, comme nous avons $\varepsilon < 1$, nous aurons là

$$a' + \varepsilon < 10^n - 1.$$

Donc

$$\alpha < 1; \quad \text{par conséquent} \quad \alpha + \varepsilon < 2.$$

Si on augmente a' d'une unité de son dernier ordre, le résultat sera donc une valeur approchée de A, soit par excès, soit par défaut, sans que l'erreur atteigne une unité de l'ordre du dernier chiffre.

Quand les chiffres de a' seront tous des 9, la différence $A - a' = \alpha + \varepsilon$ n'atteindra pas encore deux unités de l'ordre du dernier chiffre de a', pourvu qu'on ait

$$\varepsilon + \frac{a' + \varepsilon}{10^n - 1} < 2$$

ou

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{10^n - 1} < 1,$$

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} = \frac{99\cdots9}{10^n} = 0{,}99\cdots9,$$

c'est-à-dire que, si dans le développement de a les n chiffres qui suivent les n premiers ne sont pas eux-mêmes des 9 comme ces n premiers, a' sera une valeur approchée de A par défaut, à moins de deux unités de son dernier ordre. Donc, en augmentant a' d'une unité de ce dernier ordre, on aura encore une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, sans que l'erreur aille jusqu'à une unité de cet ordre.

2° Soit $\alpha < 0$, avec $-\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}$.

Comme précédemment, posons

$$a = a' + \varepsilon,$$

d'où

$$A = a' + \varepsilon + \alpha,$$

a' comprenant les n premiers chiffres de a.

Nous aurons

$$-\alpha < \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{10^n};$$

là, au numérateur,

$$\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}.$$

Donc, puisque

$$a' \leqq 10^n - 1 \quad \text{et} \quad a' + \varepsilon < 10^n,$$

on aura

$$a' + \varepsilon + \alpha < 10^n;$$

donc

$$-\alpha < 1.$$

Donc, dans

$$A = a' + \varepsilon + \alpha,$$

l'erreur $\varepsilon + \alpha$ est comprise entre -1 et $+1$. Dans ce cas, c'est la quantité a' elle-même qui sera une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, à moins d'une unité de son dernier ordre.

Application. — Soit à diviser un nombre entier par un autre, au cas où le quotient est d'un seul chiffre; c'est le cas de toute division partielle pour un quotient de plusieurs chiffres.

Si on prend pour diviseur partiel l'ensemble des deux premiers chiffres du diviseur, ce diviseur partiel sera une valeur approchée du diviseur avec une erreur relative $< \frac{1}{10}$, et par défaut. De là le quotient par excès, et avec une erreur relative également moindre en sa valeur absolue que $\frac{1}{10}$. Donc, si l'on y prend un chiffre, on en aura une valeur approchée à moins d'une unité par excès ou par défaut.

Le chiffre amené par la division partielle sera donc le chiffre voulu, ou le surpassera seulement d'une unité. Si l'on en fait l'essai, au cas où il devra être rejeté, le nombre inférieur d'une unité sera le bon chiffre.

II. En usant des mêmes notations qu'auparavant, soit K le premier chiffre de a ou de A, et soit

$$\pm \frac{\alpha}{A} < \frac{1}{(K+1)\,10^n}; \quad \text{d'où} \quad \pm \alpha < \frac{A}{(K+1)\,10^n}.$$

1° Soit $\alpha > 0$.

Désignons par a' l'ensemble des $n+1$ premiers chiffres de a à partir d'un premier significatif.

Posons

$$a = a' + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad < 1,$$

en unités du dernier ordre de a'.

Nous aurons

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{(K+1)\,10^n};$$

d'où

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon}{(K+1)\,10^n - 1}.$$

Si

$$a' < (K+1)\,10^n - 1 = K99\ldots9,$$

comme $\varepsilon < 1$, nous aurons

$$a' + \varepsilon < (K+1)\,10^n - 1.$$

Donc

$$\alpha < 1, \quad \alpha + \varepsilon < 2.$$

Alors on augmentera a' d'une unité de son dernier ordre, et l'on aura une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, à moins d'une unité de ce dernier ordre de a'.

Si

$$a' = (K+1)\,10^n - 1 = K99\ldots9,$$

nous aurons encore $\alpha + \varepsilon < 2$, pourvu qu'on ait

$$\frac{\varepsilon}{(K+1)\,10^n - 1} + \varepsilon < 1$$

ou

$$\varepsilon < \frac{(K+1)\,10^n - 1}{(K+1)\,10^n},$$

$$\varepsilon < \frac{(K+1)(10^n - 1) + K}{(K+1)\,10^n},$$

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} + \frac{K}{K+1}\,\frac{1}{10^n};$$

cette condition sera remplie dès qu'on aura

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} = 0,99\ldots 9.$$

Donc, quand dans le développement de a les n chiffres qui suivent K sont des 9, il suffit que les n chiffres qui suivraient ceux-là ne soient pas tous des 9, pour que a' soit par défaut une valeur approchée de A à moins de deux unités de son dernier ordre, de sorte qu'en augmentant a' d'une unité de cet ordre, l'erreur ne montera plus à une unité en plus ou en moins.

2° Si on a $\alpha < 0$, l'inégalité sera

$$-\alpha < \frac{A}{(K+1)\,10^n} = \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{(K+1)\,10^n} < \frac{a' + \varepsilon}{(K+1)\,10^n},$$

et il s'ensuit

$$-\alpha < 1.$$

Donc

$$\pm(\alpha + \varepsilon) < 1.$$

Donc alors a' est une valeur approchée, en plus ou en moins, sans erreur montant à une seule unité.

Application.—On déduit de là que pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal A, si l'on y connaît m chiffres à partir d'un premier significatif, on peut évaluer m chiffres dans la racine, à moins d'une unité de l'ordre du dernier de ces chiffres, en plus ou en moins, si la première tranche est d'un seul chiffre; et, lorsque la première tranche est de deux chiffres, cela a lieu aussi, pourvu que le premier chiffre de cette tranche ne soit pas inférieur à 4. A défaut de cette condition on pourra évaluer $m - 1$ chiffres dans la racine.

Si, à la place de $\sqrt{A(A+\alpha)}$, on prend $a = A + \frac{\alpha}{2}$,

on trouve, α étant > 0, que l'erreur relative est

$$E_r < \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2;$$

donc, si on a

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n},$$

on pourra évaluer, par a, $2n + 1$ chiffres, à moins que le premier n'y soit 8 ou 9; dans ce cas on s'arrêtera à $2n$ chiffres.

En conséquence, si A et A' sont des nombres ayant $n + 1$ chiffres communs, leur différence $\alpha = A' - A$ étant moindre qu'une unité de l'ordre du dernier de ces chiffres, et K désignant le premier chiffre de cette différence, on aura

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{K\,10^n};$$

d'où

$$E_r < \frac{1}{8K^2}\,\frac{1}{10^{2n}}.$$

De là, dans tous les cas, si $K > 1$, au moins $2n + 1$ chiffres par $a = \frac{A + A'}{2}$, et si $K \geqq 4$, $2n + 2$ chiffres.

Il est même à observer que si α se trouvait moindre que $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}, \ldots$, on aurait, par a, soit 2, soit 4 chiffres de plus.

Nous venons de supposer, il est vrai, que les chiffres du résultat qui suivent le premier ne sont pas tous des 9, ou que la condition précédemment reconnue soit remplie.

Pour la racine cubique d'un nombre développé en décimales, si la première tranche à considérer dans l'extraction est de 1 ou de 2 chiffres, on pourra évaluer

m chiffres dans la racine à partir d'un premier significatif, lorsqu'on en connaîtra m dans le nombre. Si la première tranche est de trois chiffres, et que le premier chiffre ne soit pas inférieur à 3, il en sera de même. Dans le cas contraire, il conviendra de se borner à $n-1$ chiffres dans la racine.

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1865

(voir 2e série, t. IV, p. 424);

Par M. A. R.

On considère n variables $x, y, z, \ldots, u, v$: décomposer le polynôme

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + v^2 + (x + y + z + \ldots + v)^2$$

composé de $(n+1)$ carrés, en la somme de n carrés de fonctions homogènes et du premier degré.

Prenons d'abord deux variables. Nous aurons

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

ou

$$2\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} + 2y^2 = \frac{1}{1.2}(2x + y)^2 + \frac{1}{2.3}9y^2.$$

Pour trois variables, on a aussi

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz + 2xy,$$

ou

$$2\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{(y+z)^2}{2} + 2y^2 + 2z^2 + 2yz,$$

ou encore

$$\frac{1}{1.2}(2x+y+z)^2+\frac{1}{2.3}(3y+z)^2+\frac{1}{3.4}(4z)^2.$$

On verrait de même que pour quatre variables on aurait

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+u^2+(x+y+z+u)^2 &= \frac{1}{1.2}(2x+y+z+u)^2+\frac{1}{2.3}(3y+z+u)^2 \\ &\quad+\frac{1}{3.4}(4z+u)^2+\frac{1}{4.5}(5u)^2. \end{aligned}$$

La loi de formation est évidente. Je vais maintenant démontrer qu'elle est générale, c'est-à-dire que si elle est vraie pour n variables, elle s'appliquera au cas de $(n+1)$ variables.

Soient donc les n variables $x, y, z, \ldots, u, v$. Le développement sera

$$\begin{aligned} x^2+y^2+\ldots+v^2+(x+y+z+\ldots+v)^2 &= \frac{1}{1.2}(2x+y+\ldots+v)^2 \\ &\quad+\frac{1}{2.3}(3y+z+\ldots+v)^2+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v]^2. \end{aligned}$$

Si le développement est général, je dois avoir, en admettant une variable t de plus :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+\ldots+v^2+t^2+(x+y+\ldots+v+t)^2 &= \frac{1}{1.2}(2x+y+\ldots+t)^2+\frac{1}{2.3}(3y+\ldots+t)^2+\ldots \\ &\quad+\frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v+t]^2+\frac{1}{(n+1)(n+2)}[(n+2)t]^2. \end{aligned}$$

Si de ce développement je retranche le développement

précédent, j'aurai

$$2t^2 + 2t(x + y + z + \ldots + v)$$
$$= \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] t^2$$
$$+ 2t\left[\frac{2x+y+\ldots+v}{1.2} + \frac{3y+z+\ldots+v}{2.3} + \ldots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)}\right]$$
$$+ \frac{n+2}{n+1} t^2.$$

Mais la somme

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

peut s'écrire

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

chaque terme se dédoublant de la façon suivante

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cette somme est donc égale à $\frac{n}{n+1}$. L'égalité précédente devient alors

$$2t^2 + 2t(x + y + z + \ldots + v)$$
$$= 2t^2 + 2t\left[\frac{2x+y+z+\ldots+v}{1.2}\right.$$
$$\left. + \frac{3y+z+\ldots+v}{2.3} + \ldots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)}\right].$$

Or, on voit facilement que le coefficient de $2t$ dans le second membre est égal à $x + y + z + \ldots + v$; donc cette égalité devient une identité, et par conséquent l'hypothèse dont nous sommes partis est exacte. Ainsi, la loi du développement est générale.

RÈGLE MNÉMONIQUE POUR OBTENIR LES FORMULES DE DELAMBRE;

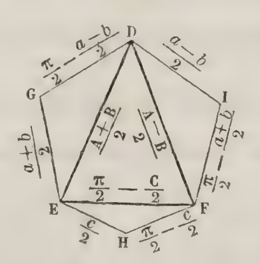
PAR M. GEORGES DOSTOR.

Néper, l'inventeur des logarithmes, a imaginé un moyen très-simple d'écrire avec certitude les relations qui existent entre les côtés et les angles du triangle sphérique rectangle. Son procédé est basé sur la construction d'un pentagone dit *pentagone de Néper*.

Les formules de Delambre sont plus compliquées que celles qui expriment les propriétés du triangle sphérique rectangle.

Cependant, par un procédé analogue à celui de Néper, on peut aussi les écrire tout de suite, sans erreur ni difficulté. Le principe de ce procédé graphique repose sur la construction d'un hexagone circonscrit à un triangle isocèle.

On construit un triangle isocèle DEF, auquel on circonscrit l'hexagone DGEHFI.



Sur les côtés DE, DF du triangle isocèle on écrit la demi-somme $\frac{A+B}{2}$ et la demi-différence $\frac{A-B}{2}$ des deux

angles A et B du triangle sphérique; sur la base EF on marque le complément $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ de la moitié du troisième angle C.

Enfin, sur la suite des côtés de l'hexagone, à partir du sommet E, dans les deux sens EDF et EHF, on écrit les arcs

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2},\quad \frac{a-b}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}$$

et

$$\frac{c}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}.$$

Cela fait, voici la règle mnémonique que nous avons imaginée pour écrire les formules de Delambre.

Elle se compose des deux principes suivants :

1° *Le sinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des sinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone* QUI NE SONT PAS ADJACENTS *au sommet commun du triangle.*

2° *Le cosinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des cosinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone* QUI SONT ADJACENTS *au sommet commun du triangle.*

En effet, considérons le côté $DE = \frac{A+B}{2}$ et la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ du triangle isocèle, qui ont le sommet commun E; le rapport des sinus de ce côté et de la base est

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}};$$

les côtés de l'hexagone sous-tendus par les côtés DE, EF

du triangle, qui ne sont pas adjacents au sommet commun E, sont

$$\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2},$$

dont les sinus ont pour rapport

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

en égalant ces deux rapports, on a la première formule de Delambre

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Si l'on compare, d'après la même règle, le côté $DF = \frac{A-B}{2}$ du triangle isocèle à la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, on en déduit

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

ou

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

qui est la deuxième formule de Delambre.

La deuxième règle fournit les deux autres formules

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)};$$

ou bien

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 752;

PAR M. L. BINY,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse
(classe de M. Forestier).

On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré, telle que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point; on demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe

à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe. Lieu du pied de la quatrième normale.

I. Soient

$$\alpha = 0, \quad 6 = 0, \quad \gamma = 0,$$

les équations des trois côtés BC, AC, AB du triangle; l'équation générale des coniques circonscrites à ce triangle sera

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{6} + \frac{n}{\gamma} = 0,$$

et les tangentes aux trois sommets A, B, C auront, respectivement, pour équations

$$\frac{6}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} + \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} + \frac{6}{m} = 0.$$

Les normales, ou les perpendiculaires aux tangentes, seront représentées par

$$\frac{6}{n - m\cos A} = \frac{\gamma}{m - n\cos A},$$

$$\frac{\alpha}{n - l\cos B} = \frac{\gamma}{l - n\cos B},$$

$$\frac{6}{l - m\cos C} = \frac{\alpha}{m - l\cos C}.$$

En éliminant l, m, n entre ces dernières équations, nous aurons l'équation du lieu géométrique cherché. L'élimination donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha + \gamma\cos B)(6 + \alpha\cos C)(\gamma + 6\cos A) \\ &= (\alpha + 6\cos C)(\gamma + \alpha\cos B)(6 + \gamma\cos A). \end{aligned} \right.$$

On voit que ce lieu est une ligne du troisième ordre.

Pour démontrer que cette ligne a un centre, je poserai le théorème suivant :

Si m droites, au moins, passant toutes par un même point, coupent une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré, chacune en m points, réels ou imaginaires, deux à deux symétriques par rapport au point de rencontre des droites, ce point de rencontre sera le centre de la courbe.

En effet, prenons pour origine le point de rencontre des m droites. Soit $y = kx$, l'équation de l'une quelconque de ces droites; les abscisses des points où elle coupe la courbe du m^e degré, seront déterminées par une équation de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0,$$

et qui ne doit contenir que des termes de même parité que m.

Le coefficient B de x^{m-1} est une fonction algébrique de k, au plus du degré $m-1$. Cette fonction doit être annulée par m valeurs différentes de k; donc, les coefficients des puissances de k qui la composent, sont identiquement nuls. Il en est de même des termes en x^{m-3}, x^{m-5}, ... Donc, l'équation de la courbe ne contient que des termes de même parité qne m, en x et y. Par conséquent, l'origine des coordonnées est le centre de la courbe.

C. Q. F. D.

Cela posé, je dis que le lieu dont nous avons trouvé l'équation a pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

Les équations des droites menées des sommets A, B, C au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, sont

$$\gamma \cos B = \beta \cos C, \quad \beta \cos A = \alpha \cos B, \quad \alpha \cos C = \gamma \cos A;$$

les coordonnées du point commun à ces trois droites vérifient l'équation du lieu; donc la ligne du 3ᵉ ordre que cette équation représente, passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle.

Cette courbe passe par les trois sommets A, B, C du triangle ABC, et par les points A′, B′, C′, diamétralement opposés à A, B, C, sur la circonférence circonscrite au triangle.

Il est évident que les coordonnées des sommets A, B, C satisfont à l'équation (1).

Le point A′ est à l'intersection des droites BA′, CA′, perpendiculaires à BA, CA, et qui ont pour équations

$$\alpha + \gamma \cos B = 0, \quad \alpha + 6 \cos C = 0.$$

Or, $\alpha + \gamma \cos B$ est facteur du premier membre de l'équation (1), et $\alpha + 6 \cos C$ est facteur du second membre; donc les coordonnées de A′ vérifient l'équation (1). On prouve de même que B′ et C′ sont des points du lieu.

Ainsi, chacune des trois droites AOA′, BOB′, COC′ coupe la courbe en deux points symétriques par rapport au point O; il résulte du théorème que nous avons précédemment démontré, que le point O est le centre de cette courbe.

En modifiant la forme de l'équation (1), on trouve d'autres points qui appartiennent encore à la courbe, et dont l'existence pouvait être prévue. En développant cette équation on a

$$\begin{aligned} & 6(\alpha^2 - \gamma^2)(\cos A \cos C - \cos B) + \alpha(\gamma^2 - 6^2)(\cos B \cos C - \cos A) \\ & \quad + \gamma(6^2 - \alpha^2)(\cos A \cos B - \cos C) = 0. \end{aligned}$$

Sous cette forme l'équation montre que la courbe passe par les points de rencontre des bissectrices extérieures et intérieures au triangle donné (*).

(*) Le lieu cherché est celui d'un point P tel que les perpendiculaires menées aux droites PA, PB, PC par les sommets A, B, C du triangle rencontrent les côtés opposés BC, AC, AB en trois points en ligne droite. Cette définition de la ligne que l'on cherche donne, sans aucun calcul,

La courbe a des branches infinies; car, si l'on mène par le sommet A une parallèle AM au côté BC, le système de ces deux parallèles AM, BC peut être considéré comme une ligne du second ordre passant par les sommets A, B, C, et les normales en ces points A, B, C se coupent à l'infini. Il en est de même pour les deux autres côtés du triangle.

Nous avons remarqué que les facteurs du premier degré, dont les produits composent les deux membres de l'équation (1) du lieu, donnent, égalés à zéro, les équations des perpendiculaires élevées sur les trois côtés du triangle, en ses trois sommets. Ces six droites forment un hexagone inscrit dans le cercle circonscrit au triangle, et dont les côtés opposés sont égaux et parallèles. On voit, du reste, que l'équation du lieu s'obtient en égalant le produit des premiers membres des équations de trois des côtés non consécutifs de cet hexagone, au produit des premiers membres des équations des trois autres côtés. Ce qu'on peut écrire ainsi

$$AC'.BA'.CB' = AB'.CA'.BC'. \tag{2}$$

Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le centre O du cercle circonscrit; pour axe des abscisses une parallèle au côté BC, l'axe des y sera la perpendiculaire abaissée du centre sur ce côté, en nommant r le rayon du cercle circonscrit au triangle, les droites AC', BA', CB',

---

douze points qui appartiennent à cette ligne : ce sont les trois sommets du triangle, le centre de la circonférence circonscrite, les points de cette circonférence diamétralement opposés aux sommets, le point de concours des trois hauteurs et les centres des quatre circonférences tangentes aux trois côtés du triangle. Il suffit de connaître neuf points d'une ligne du troisième ordre pour qu'elle soit déterminée.

Au moyen de la même définition, on trouve en coordonnées *cartésiennes*, et par un calcul assez simple, l'équation du lieu cherché. G.

AB', CA', BC' seront représentées par les équations

$$x\cos C - y\sin C + r\sin B = 0, \quad x\cos B + y\sin B + r\sin C = 0,$$
$$x - r\sin A = 0;$$
$$x\cos B + y\sin B - r\sin C = 0, \quad x\cos C - y\sin C - r\sin B = 0,$$
$$x + r\sin A = 0.$$

Substituant dans l'équation (1), on a l'équation du lieu en coordonnées x, y. En appliquant à cette dernière équation les règles qui donnent les asymptotes, on trouve que la courbe a pour asymptotes les trois perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés du triangle; la forme de la courbe est alors facile à déterminer.

Lorsque les angles B, C sont égaux entre eux, l'équation du lieu se décompose en $x = 0$ et en l'équation d'une hyperbole.

II. *Lieu du pied de la quatrième normale.*

On sait que par les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique, on peut faire passer une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique. Cela posé, il est évident que l'équation du lieu s'obtiendra, en éliminant l, m, n, entre l'équation d'une conique circonscrite au triangle proposé, l'équation de l'hyperbole équilatère dont nous venons de parler, et la relation qui existe entre l, m, n, pour que les normales en A, B, C à la conique se coupent au même point (*).

On peut encore obtenir l'équation du lieu en s'appuyant sur ce théorème connu :

Dans une conique à centre les pieds des trois nor-

(*) La relation qui existe entre l, m, n lorsque l'équation

(1) $$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0,$$

représente une conique dont les normales en A, B, C se coupent au même

males issues d'un même point et le symétrique du pied de la quatrième normale, par rapport au centre de la conique, sont sur une même circonférence.

Note. — MM. Carlos Watteau, élève de M. Painvin, et M. David ont donné de cette question des solutions peu différentes de celle qui précède.

Question 734;

PAR M. VICTOR STREXALOFF,
Élève de l'Université de Saint-Pétersbourg.

Soient α, β, γ *les milieux des côtés* BC, AC, AB *d'un triangle;* P *le point de rencontre des hauteurs* AD, BE,

---

point est

$$(2) \qquad \frac{l}{\sin A}(m^2 - n^2) + \frac{m}{\sin B}(n^2 - l^2) + \frac{n}{\sin C}(l^2 - m^2) = 0.$$

Quand l'équation (1) représente une hyperbole équilatère, on a

$$(3) \qquad l\cos A + m\cos B + n\cos C = 0.$$

Les équations (1) et (3) donnent

$$l = \alpha(\gamma\cos C - \beta\cos B), \quad m = \beta(\alpha\cos A - \gamma\cos C), \quad n = \gamma(\beta\cos B - \alpha\cos A).$$

On peut remarquer que

$$\gamma\cos C - \beta\cos B = 0, \quad \alpha\cos A - \gamma\cos C = 0, \quad \beta\cos B - \alpha\cos A = 0$$

sont les équations des perpendiculaires abaissées des trois sommets A, B, C sur les côtés opposés.

En désignant donc par

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0,$$

les équations des hauteurs du triangle donné, il vient

$$l = \alpha\alpha', \quad m = \beta\beta', \quad n = \gamma\gamma'.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer l, m, n par ces expressions dans l'équation (2), il en résulte

$$\frac{\alpha\alpha'}{\sin A}[(\beta\beta')^2 - (\gamma\gamma')^2] + \frac{\beta\beta'}{\sin B}[(\gamma\gamma')^2 - (\alpha\alpha')^2] + \frac{\gamma\gamma'}{\sin C}[(\alpha\alpha')^2 - (\beta\beta')^2] = 0.$$

G.

CF; O *le centre du cercle circonscrit au triangle dont le rayon est* R.

Sur les segments PA, PB, PC, Pα, Pβ, Pγ, *on prend les points* p, q, r, p', q', r', *de telle sorte que*

$$Pp = \frac{1}{n}PA, \quad Pq = \frac{1}{n}PB, \quad Pr = \frac{1}{n}PC;$$

$$Pp' = \frac{2}{n}P\alpha, \quad Pq' = \frac{2}{n}P\beta, \quad Pr' = \frac{2}{n}P\gamma;$$

et enfin, on désigne par p'', q'', r'' *les pieds des perpendiculaires abaissées des points* p', q', r' *sur les hauteurs* AD, BE, CF *respectivement.*

Démontrer que p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'' *sont neuf points d'une même circonférence, dont le rayon est égal à* $\frac{1}{n}$R, *et dont le centre est un point* M *situé sur la ligne* PO, *de telle sorte que* $PM = \frac{1}{n}PO$ (*).

D'abord, je démontre que les trois points p, q, r se trouvent sur la circonférence décrite du point M comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{n}$R.

Je mène les droites OA, OB, OC. Puisque

$$\frac{PO}{PM} = \frac{PA}{Pp} = \frac{PB}{Pq} = \frac{PC}{Pr} = n,$$

il est clair que les droites Mp, Mq, Mr sont respectivement parallèles aux rayons OA, OB, OC; et, par conséquent, on a

$$\frac{PO}{PM} = \frac{OA}{Mp} = \frac{OB}{Mq} = \frac{OC}{Mr} = n;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où l'on déduit

$$Mp = Mq = Mr = \frac{1}{n} R.$$

Donc, les points p, q, r sont sur la circonférence dont le centre est le point M, et dont le rayon est égal à $\frac{1}{n} R$.

Maintenant il me reste à démontrer que tous les autres points p', q', r', p'', q'', r'' sont sur la même circonférence que les points p, q, r. Pour établir cette proposition il suffit de faire voir que les lignes $p'Mp$, $q'Mq$, $r'Mr$ sont des lignes droites divisées chacune, au point M, en deux parties égales. Et il est bien facile de reconnaître que cela revient à démontrer que les droites MS_1, MS_2, MS_3, menées de M aux milieux S_1, S_2, S_3 des droites Pp', Pq', Pr', sont respectivement parallèles à Pp, Pq, Pr, et égales à $\frac{1}{2} Pp$, $\frac{1}{2} Pq$, $\frac{1}{2} Pr$.

On a

$$PS_1 = \frac{1}{2} Pp' = \frac{1}{n} P\alpha \quad \text{et} \quad PM = \frac{1}{n} PO;$$

d'où

$$\frac{PS_1}{PM} = \frac{P\alpha}{PO};$$

donc MS_1 est parallèle à $O\alpha$, et, par suite, à Pp.

De plus,

$$MS_1 = \frac{1}{n} O\alpha.$$

Mais on sait que

$$O\alpha = \frac{1}{2} PA;$$

il en résulte

$$MS_1 = \frac{1}{2n} PA = \frac{1}{2} Pp.$$

Il est évident qu'on prouverait de même que les droites MS_2, MS_3 sont parallèles aux droites Pq, Pr, et égales à $\frac{1}{2}Pq$, $\frac{1}{2}Pr$.

La proposition est donc démontrée.

Note. — Cette première partie de la question 754 a de même été résolue par MM. E. Roudox, élève du lycée Charlemagne; V. Niébylowski, du lycée Bonaparte; H. Feuilles, et A. Viant, du Prytanée Militaire.

Quant à la condition de contact (p. 96), M. Niébylowski remarque qu'elle ne peut être généralement exprimée par l'égalité

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{r^2}{\rho^2};$$

car $\rho^2 = -2R^2 \cos A \cos B \cos C$, et, dans le cas du triangle rectangle, on a

$$\rho^2 = 0 \quad \text{et par suite} \quad \frac{1}{n} = \infty.$$

Question 725 (*);

PAR M. RENAUD,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2 + x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2.$$

Première méthode. — Posons

$$x + 2 = y,$$

l'équation devient

$$(1) \qquad (y^2 + x^2)^3 = 8x^4y^2;$$

divisant les deux membres par y^6, on a

$$(2) \qquad \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^3 = 8\frac{x^4}{y^4}.$$

(*) La solution donnée dans le numéro de juin renferme quelques inexactitudes.

Soit

$$z = \frac{x^2}{y^2},$$

l'équation (2) développée devient

$$(3) \qquad z^3 - 5z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Cette équation admet la racine 1; elle peut donc s'écrire

$$(z-1)(z^2 - 4z - 1) = 0.$$

Ses racines sont donc 1, $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$.

$$z = 1 \quad \text{donne} \quad x^2 = (x+2)^2 \quad \text{ou} \quad x = -1,$$

$$z = 2+\sqrt{5} \quad \text{donne} \quad x^2 = (x+2)^2(2+\sqrt{5}),$$

$$(4) \qquad x^2(1+\sqrt{5}) + 4x(2+\sqrt{5}) + 4(2+\sqrt{5}) = 0;$$

les racines de cette équation (4) sont

$$x = \frac{-2(2+\sqrt{5}) \pm \sqrt{4(2+\sqrt{5})^2 - 4(1+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}},$$

$$x = \frac{-2(2+\sqrt{5}) \pm \sqrt{4(2+\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}};$$

ou, en rendant le dénominateur rationnel,

$$x = \frac{-3-\sqrt{5} \pm \sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2};$$

$z = 2-\sqrt{5}$ donnerait pour x les valeurs

$$x = \frac{-3+\sqrt{5} \pm \sqrt{2-2\sqrt{5}}}{2}.$$

En divisant par y^6, nous avons écarté le cas de $y = 0$; or, $y = 0$ donne $x = -2$ qui n'est pas racine de l'équation proposée; nous avons donc les seules racines de l'é-

quation : trois sont réelles et négatives, les deux autres imaginaires.

Voici maintenant la méthode de M. Lebasteur.

Je pose

$$x + 1 = y;$$

j'ai alors

$$\begin{aligned}(y^2 + 1)^3 &= (y - 1)^4 (y + 1)^2 \\ &= (y^2 - 1)^2 (y - 1)^2.\end{aligned}$$

Soit

$$y + \frac{1}{y} = z.$$

Divisant les deux membres par y^3, l'équation s'écrit

$$\begin{aligned}\left(y + \frac{1}{y}\right)^3 &= \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \frac{(y-1)^2}{y} \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right)\left(y + \frac{1}{y} - 2\right).\end{aligned}$$

Or,

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2;$$

on a donc

$$z^3 = (z^2 - 4)(z - 2); \quad \text{c'est-à-dire} \quad z^2 + 2z - 4 = 0,$$

équation dont les racines sont

$$z = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Mais on a

$$y^2 - zy + 1 = 0, \quad y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

et

$$x = y - 1, \quad x = \frac{z - 2 \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-1 \pm \sqrt{5})^2 - 4}}{2}.$$

Il faut ainsi ajouter la racine — 1 fournie par l'hypothèse $y = 0$.

Les cinq racines sont donc

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5} + \sqrt{2 \mp 2\sqrt{5}}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-3 \pm \sqrt{5} - \sqrt{2 \mp 2\sqrt{5}}}{2};$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant, les racines fournies par les signes inférieurs sont réelles; nous avons donc trois racines réelles.

QUESTIONS.

775. L'équation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (Sylvester.)

776. L'équation

$$1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}x^n = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles, quand γ est > 0, et $< -n$. (Sylvester.)

777. Si l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines imaginaires, l'équation

$$f(x) + af'(x) + a^2f''(x) + \ldots + a^m f_m(x) = 0$$

n'aura, elle aussi, que des racines imaginaires.

(Hermite.)

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 385);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

IX. — *Cas particuliers de la détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du second ordre et deux du premier ordre avec des courbes données.*

40. Nous nous contenterons de considérer les cas où deux des courbes données se touchent.

Supposons premièrement que les courbes C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2} dont les contacts avec les coniques du système sont du premier ordre, se touchent en un point θ. Alors selon le n° 23, le système $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}]$ se divise en deux: $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta]$, $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1} - C_{m_2 n_2}]$, et une caractéristique du système général comprend *deux fois* la caractéristique homologue du premier système partiel et *une fois* celle du second. On sait encore selon le n° 24 que, pour toute espèce de coniques infiniment aplaties du système général limitées à un point d'intersection de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2}, le premier système partiel en contient une qui comprend les coniques passant par le point de contact θ et du reste déterminées de la même manière qu'au grand système, et que celle-ci a, dans le nombre λ du système partiel, le même coefficient que l'espèce homologue dans le λ du système général. Comme le système général ne contient aucune conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente commune à

C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2}, les systèmes partiels n'en contiendront plus dans la tangente de contact au point θ (*voir* le n° 24). Toutes les coniques infiniment aplaties du système $[(C_{m,m})^2, C_{m_1, n_1}\theta)$ correspondent donc à la première et à la cinquième espèce nommées au n° 29, et les théorèmes du n° 34 donnent lieu aux suivants :

Pour un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée $C_{m,n}$ *et un contact du premier ordre en un point donné* θ *avec une autre courbe donnée* C_{m_1, n_1}, *il faut compter dans le nombre* λ :

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie limitée à* θ, *tangente à* $C_{m,n}$ *et limitée au point de contact;*

Une fois, *toute conique infiniment aplatie limitée à* θ *et à un point de rebroussement de* $C_{m,n}$.

Par des procédés analogues, ou au moyen du principe de dualité on voit que :

Pour le même système, il faut compter dans le nombre ϖ :

Trois fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* C_{m_1, n_1} *au point* θ *et de la droite qui touche* $C_{m,n}$ *en l'un des points où elle rencontre la première droite;*

Une fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* C_{m_1, n_1} *au point* θ *et d'une tangente d'inflexion à* $C_{m,n}$.

41. On aura (selon le n° 40) pour le système $[(C_{m,n})^2, C_{m_1, n_1}\theta]$,

$$\lambda = 3.n + 1.d',$$
$$\varpi = 3.m + 1.t'.$$

d'où

$$\mu = \nu = 3n + d' = 3m + t'. \quad (15a)$$

Alors

(15*b*) $$[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta] \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

(15*c*) $$\mu = \nu = 3m(m-1).$$

42. Les théorèmes du n° 40 sont encore vrais dans le cas où les courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident et pour un système de coniques qui ont avec une même courbe deux contacts, l'un du second ordre en un point non donné, l'autre du premier ordre en un point donné. Ce système sera représenté par $[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta]$. On trouve pour ce système :

$$\lambda = 3.(n-2) + 1.d',$$
$$\varpi = 3.(m-2) + 1.t',$$

d'où

(16*a*) $$\mu = \nu = 3(n-2) + d' = 3(m-2) + t'.$$

Alors

(16*b*) $$[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta) \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

(16*c*) $$\mu = \nu = 3(m-2)(m+1).$$

Pour $m = 2$ on trouve $\mu = \nu = 0$.
Pour $m = 3$ on trouve $\mu = \nu = 12$.

43. Nous aurons encore à traiter les cas où une courbe avec laquelle les coniques d'un système ont un contact du second ordre, en touche une autre avec laquelle elles ont un contact du premier ordre. Alors la formule (I) du n° 23 sera remplacée par la suivante :

(I) $$\left\{ \begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z_1, Z_2] = {} & 3N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2] \\ & + N[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z_1, Z_2], \end{aligned} \right.$$

où $(C_{m,n})^2\theta$ exprime la condition d'un contact du second ordre en un point donné, et $(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}$ celles d'avoir avec $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui se touchent elles-mèmes des contacts séparés respectivement du second et du premier ordre.

On aura en particulier, si $C_{m',n'}$ se réduit à un point,

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, p, Z_1, Z_2] = 3.N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2] \\ + N[(C_{m,n})^2 - p, Z_1, Z_2], \end{aligned} \right.$$

où $(C_{m,n})^2 - p$ représente les conditions d'avoir avec $C_{m,n}$ un contact du second ordre en un point non donné, et de la couper en un point donné. Si $C_{m',n'}$ se réduit à une droite, la formule (I) sera remplacée par la suivante :

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, l, Z_1, Z_2] = 3N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2) \\ + N[(C_{m,n})^2 - l, Z_1, Z_2). \end{aligned} \right.$$

Au moyen de la formule (I), où l'on peut remplacer la condition Z_2 successivement par celles de passer par un point et de toucher une droite, on voit qu'*un système* $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z]$, *dans le cas où* $C_{m,n}$ *et* $C_{m',n'}$ *se touchent elles-mêmes, se divise en deux systèmes partiels* $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$ *et* $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z]$, *et que chacune des caractéristiques du système général comprend trois fois la caractéristique homologue du premier système partiel et une seule fois celle du second système.*

44. Pour trouver les coniques singulières d'un système $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$, il faut regarder celle du système $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z]$ et examiner ce qu'elles deviennent dans le cas où deux points d'intersection p_1 et p_2 de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ coïncident avec un point de contact θ. Au système $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$ pourront appartenir, après cette coïncidence de p_1 et p_2, des coniques infiniment aplaties :

1° Tangentes à $C_{m,n}$ en l'un des points p_1 ou p_2 et limitées au même point ;

2° Renfermées dans une des deux tangentes communes à $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$, qui coïncident en même temps que p_1 et p_2 et limitées au point de contact avec $C_{m,n}$.

Ces deux espèces de coniques singulières seront, après la coïncidence de p_1 et p_2, renfermées dans la tangente à $C_{m,n}$ au point θ et limitées à ce point. Mais elles n'appartiendront pas toutes au premier système partiel, parce qu'une conique infiniment aplatie, déterminée de la manière indiquée, est aussi une limite des coniques du système $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z)$. (*Voir* le n° 24.)

Si la condition Z consiste dans un contact avec une courbe donnée C_{m_1,n_1}, les coniques aplaties dont il s'agit seront assujetties, à côté des conditions nommées, de toucher $C_{m,n}$ au point θ et d'y être limitées, à celle d'être limitées par C_{m_1,n_1}. Les coniques infiniment aplaties du système $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$, qui coïncident dans chacune, comptent pour 18 dans le nombre λ de ce système (selon la deuxième et la troisième proposition du n° 34). Si nous supposons que la même conique singulière compte pour x dans le λ du système $[(C_{m,n})^2\theta, C_{m_1,n_1}]$ et pour y dans celui du système $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$, nous aurons, selon les n°s 43 et 22,

$$18 = 3x + y,$$

d'où $x < 6$, puisque y est positif.

Les coniques à point double donnent lieu à des considérations semblables; mais pour elles nous renvoyons au principe de dualité.

45. Le système $[(C_{m,n})^2\theta, C_{m_1,n}]$ ne contient de coniques infiniment aplaties que celles qui sont nommées au n° 44. Donc

$$\lambda = x.m_1, \quad \varpi = x.n_1,$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{3} x (2m_1 + n_1);$$

μ devant être entier et x positif et plus petit que 6, on doit avoir $x = 3$.

On trouve maintenant

$$(17a) \quad \begin{cases} \mu = 2m_1 + n_1, \\ \nu = 2n_1 + m_1, \end{cases}$$

$$(17b) \quad [(C_{m,n})^2 \theta, C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu, \nu).$$

46. x ayant la valeur 3, on a les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques ayant un contact du second ordre en un point donné θ avec une courbe $C_{m,n}$, et un contact du premier ordre en un point non déterminé avec une courbe C_{m_1,n_1}, on doit compter :

Dans le nombre λ, trois fois *toute conique infiniment aplatie, tangente à $C_{m,n}$ au point θ, limitée à ce point et à C_{m_1,n_1};*

Et dans le nombre ϖ, trois fois *toute conique ayant θ pour point double, composée de la tangente à $C_{m,n}$ en ce point et d'une tangente à C_{m_1,n_1}.*

Ces théorèmes sont encore vrais lorsque $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident.

47. Le système $[(C_{m,n})^2 \theta, C_{m,n}]$ dont les coniques ont deux contacts avec $C_{m,n}$, l'un du second ordre en un point donné, l'autre du premier ordre en un point non déterminé, ne contient pas d'autres coniques singulières que celles que nous venons d'indiquer au n° 46. Donc

$$\lambda = 3(m - 2), \quad \varpi = 3(n - 2),$$

d'où

$$(18a) \quad \begin{cases} \mu = 2m + n - 6, \\ \nu = m + 2n - 6, \end{cases}$$

$$(18b) \quad [(C_{m,n})^2 \theta, C_{m,n}] \equiv (\mu, \nu),$$

et pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(18c)\qquad \begin{cases} \mu = (m-2)(m+3), \\ \nu = (m-2)(2m+3). \end{cases}$$

Pour $m=2$, on trouve $\mu=\nu=0$,
Pour $m=3$, on trouve $\mu=6$, $\nu=9$.

48. Les caractéristiques des systèmes

$$[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1} - C_{m_2,n_2}] \quad \text{et} \quad [(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$$

(*voir* les nos 40 et 43) se trouvent maintenant au moyen des équations (I) des nos 23 et 43.

Pour trouver les caractéristiques du système

$$[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'} - C_{m,n}],$$

dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ un contact du second et un contact du premier ordre, et avec $C_{m',n'}$, qui touche $C_{m,n}$, un contact du premier ordre séparé des deux premiers contacts, on fait usage de l'équation suivante :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, C_{m',n'}, Z] = 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ \qquad + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ \qquad + N[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'} - C_{m,n}, Z]. \end{cases}$$

On trouve, en particulier,

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p, Z] = 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ \qquad + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ \qquad + N[(C_{m,n})^2 - p - C_{m,n}, Z], \end{cases}$$

où $(C_{m,n})^2 - p - C_{m,n}$ exprime les conditions de deux contacts du second et du premier ordre en des points non donnés, et d'une intersection en un point donné, avec une même courbe $C_{m,n}$, et

$$\begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\, l, Z] = {} & 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ & + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ & + N[(C_{m,n})^2 - l - C_{m,n}, Z]. \end{aligned}$$

X. *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont des contacts du second ordre avec deux courbes données.*

49. Soient $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} les courbes données; alors le système sera désigné par $[(C_{m,n})^2, (C_{m_1,n_1})^2]$.

Il contient toute conique infiniment aplatie :

1° Renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée aux points de contact;

2° Passant par un point de rebroussement de l'une des courbes données, tangente à l'autre et limitée aux points de rebroussement et de contact;

3° Passant par et limitée à un point de rebroussement de chacune des deux courbes.

Désignons par x, y et z les coefficients relatifs à ces trois classes dans l'expression de λ; alors

$$\lambda = x n n_1 + y(d' n_1 + d'_1 n) + z d' d'_1,$$

et selon le principe de dualité

$$\varpi = x m m_1 + y(t' m_1 + t'_1 m) + z t' t'_1,$$

d'où résulte

$$\mu = \frac{1}{3}[x(mm_1 + 2nn_1) + y(t'm_1 + t'_1 m + 2d'n_1 + 2d'_1 n) + z(t't'_1 + 2d'd'_1)],$$

$$\nu = \frac{1}{3}[x(2mm_1 + nn_1) + y(2t'm_1 + 2t'_1 m + d'n_1 + d'_1 n) + z(2t't'_1 + d'd'_1)].$$

50. Pour déterminer les valeurs des coefficients nous essayerons de trouver par d'autres moyens la valeur de μ dans le cas où $C_{m,n}$ est remplacée par la courbe M de l'ordre m et douée d'un point multiple de l'ordre $m - 1$, (*voir* le n° 30). Il nous faudra appliquer le lemme du

n° 31 au système $[M, (C_{m_1,n_1})^2, p)$ auquel correspondront (les notations du n° 31 étant conservées) les valeurs suivantes :

$$r = 1, \quad q = 2m - 2,$$
$$\alpha = N[(M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p]$$
$$\beta = N[M - p_1, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

ou, d'après l'équation (II) du n° 23,

$$\beta = N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1)] - 2N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

d'où

$$q\alpha + \beta = 2(m-2)N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p] + N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1].$$

Or, selon les formules (15) et (11), qui sont encore vraies pour la courbe particulière M (*),

$$N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p] = 3m_1 + t'_1,$$
$$N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1) = (3m_1 + t'_1)(2m + n),$$

et, selon le n° 30, $n = 2(m-1)$; par conséquent

$$q\alpha + \beta = 6(m-1)(3m_1 + t'_1).$$

Comme aucune des $q\alpha + \beta$ coniques dont un point d'intersection avec M coïncide avec un point de contact n'est infiniment aplatie, elles auront toutes un contact du second ordre avec cette courbe. Donc

$$q\alpha + \beta = N[(M)^2, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

et nous aurons une expression de cette quantité en substituant dans celle que nous avons trouvée pour μ, dans le numéro précédent, les valeurs de n, d' et t' qui correspondent à la courbe M :

$$n = 2(m-1), \quad d' = 0, \quad t' = 3(m-2).$$

(*) *Voir* la note du n° 32.

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}\Big\{[(x+15y)m - 18y]m_1 + 4(x-3y)(m-1)n_1 \\ + [(5y+3z)m - 6y - 6z]t'_1\Big\}.$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ doivent être égales, et comme les nombres m, m_1, n_1 et t'_1 peuvent prendre, indépendamment les uns des autres, une infinité de valeurs, elles doivent être identiques, ce qui donne

$$x = 9, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

51. En substituant dans les expressions trouvées pour μ et ν dans le n° 49 ces valeurs de x, y et z et réduisant au moyen des formules de M. Plücker, on trouve

$$(19a) \quad \mu = \nu = (3m + t')(3m_1 + t'_1) = (3n + d')(3n_1 + d'_1);$$
$$(19b) \qquad [(C_{m,n})^2, (C_{m_1 n_1})^2] \equiv (\mu, \nu),$$

et quand $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} sont les courbes les plus générales de leur degré,

$$(19c) \qquad \mu = \nu = 9m(m-1)m_1(m_1-1).$$

52. Les coefficients x, y et z qui entrent et dans λ et dans ϖ étant trouvés, nous aurons les propositions suivantes :

Pour un système de coniques qui ont des contacts du second ordre avec deux courbes données, il faut compter,

Dans le nombre λ :

Neuf fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée aux points de contact ;*

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie passant par un point de rebroussement de l'une des deux courbes, tangente à l'autre et limitée aux points de rebroussement et de contact ;*

Une fois, *toute conique infiniment aplatie limitée à un point de rebroussement de chacune des deux courbes;*

Et dans le nombre ϖ :

Neuf fois, *toute conique ayant pour point double un point d'intersection des deux courbes et composée des deux tangentes en ce point;*

Trois fois, *toute conique à point double composée d'une tangente d'inflexion de l'une des courbes et de la tangente à l'autre en l'un des points où elle rencontre la première droite;*

Une fois, *toute conique à point double composée d'une tangente d'inflexion de chacune des deux courbes* (*).

(*) La comparaison de ces théorèmes avec ceux du n° 34, confirme, comme dans tous les cas que j'ai traités, la règle suivante, qui par elle-même est très-probable.

Lorsque une conique infiniment aplatie, passant par et limitée à un point d'intersection de C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2}, et satisfaisant à une autre couple de conditions que nous désignerons par X, compte pour x dans le λ du système $(Z_1, Z_2, C_{m_1, n_1}, C_{m_2, n_2})$, et qu'une conique infiniment aplatie, qui aussi passe par, et est limitée à un point d'intersection de C_{m_1, n_1} avec C_{m_2, n_2}, et qui satisfait à une couple de conditions Y, compte pour y dans le λ du système $(Z_3, Z_4, C_{m_1, n_1}, C_{m_2, n_2})$; la conique infiniment aplatie, déterminée par les conditions X et Y, compte pour xy dans le λ du système (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4).

Ayant prouvé aussi pour les cas où les conditions Z_1 et Z_2 (ainsi que Z_3 et Z_4), ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, la vérité de cette règle, que je n'ai pas osé accepter *a priori*, on pourrait se passer de tout ce paragraphe-ci, les théorèmes du n° 52 résultant alors du n° 34. On en pourrait aussi faire usage ailleurs : elle donnerait, par exemple, dans le n° 29 les équations suivantes entre les coefficients :

$$z = 2x, \quad s = 2v.$$

On ne pourrait pourtant se passer des recherches du n° 32.

Du reste, nous n'avons pas donné à l'énoncé de notre règle toute la généralité probable, mais on en saura mieux fixer l'extension en même temps qu'on la *prouvera*.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LE LIEU DES FOYERS DES SECTIONS CENTRALES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. V.-A. LE BESGUE.

Pour simplifier le calcul, on suppose que les axes des coordonnées sont aussi les axes principaux de la surface qui a pour équation

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

on représente par

(2) $$mx + ny + pz = 0$$

le plan de la section, et par

(3) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

le carré d'un demi-diamètre de la section. En exprimant que r prend sa valeur maximum ou minimum au moyen des équations

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$m\,dx + n\,dy + p\,dz = 0,$$
$$Ax\,dx + By\,dy + Cz\,dz = 0,$$

on a, en éliminant les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, l'équation

$$m(B - C)yz + n(C - A)zx + p(A - B)xy = 0,$$

ou bien

(4) $$m\alpha yz + n\beta zx + p\gamma xy = 0,$$

en posant, pour abréger :

$$B - C = \alpha, \quad C - A = \beta, \quad A - B = \gamma.$$

Ces équations donnent immédiatement

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha),$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$
$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 = -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),$$

résultats qui serviront bientôt.

Les équations (1), (2), (4) donneront x, y, z; puis (3) donnera r. Mais le calcul de r peut se faire plus directement comme il suit.

Les équations (2) et (4) donnent

$$(5) \qquad \frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \lambda,$$

et, en mettant pour α, β, γ leurs valeurs, conduisent à

$$\lambda x = \frac{m}{1 - Ar^2}, \quad \lambda y = \frac{n}{1 - Br^2}, \quad \lambda z = \frac{p}{1 - Cr^2}.$$

Mais on a

$$\lambda^2 r^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2,$$
$$\lambda^2 r^2 = Ar^2 \lambda^2 x^2 + Br^2 \lambda^2 y^2 + Cr^2 \lambda^2 z^2,$$

d'où l'on tire par la soustraction

$$(1 - Ar^2)\lambda^2 x^2 + (1 - Br^2)\lambda^2 y^2 + (1 - Cr^2)\lambda^2 z^2 = 0;$$

puis, mettant pour λx, λy, λz leurs valeurs, il en résulte

$$\frac{m^2}{1 - Ar^2} + \frac{n^2}{1 - Br^2} + \frac{p^2}{1 - Cr^2} = 0,$$

et par conséquent l'équation

$$\begin{aligned}(BCm^2 + CAn^2 + ABp^2)r^4 \\ - [(B + C)m^2 + (C + A)n^2 + (A + B)p^2]r^2 \\ + (m^2 + n^2 + p^2) = 0,\end{aligned}$$

ou, pour abréger,

$$(6) \qquad \mathrm{L}r^4 - \mathrm{M}r^2 + \mathrm{N} = 0.$$

Les deux valeurs de r^2 étant

$$\frac{\mathrm{M} \pm \sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{2\mathrm{L}},$$

la différence

$$\frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}} = \rho^2,$$

prise en valeur absolue, sera le carré de la distance du centre à un des foyers.

Le carré ρ^2 peut s'exprimer comme il suit en fonction des coordonnées du foyer. On remarquera que les équations (2), (4) étant homogènes, on peut y remplacer les quantités x, y, z par des quantités proportionnelles. Ainsi, aux coordonnées des sommets on peut substituer celles des foyers, et l'on aura, ces coordonnées étant x, y, z,

$$\frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \mu,$$

ou bien encore

$$m = \mu x(\beta z^2 - \gamma y^2), \quad n = \mu y(\gamma x^2 - \alpha z^2),$$
$$p = \mu z(\alpha y^2 - \beta x^2),$$

ou, pour abréger,

$$m = \mu x\mathrm{X}, \quad n = \mu y\mathrm{Y}, \quad p = \mu z\mathrm{Z}.$$

Substituant dans la valeur de

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}},$$

on aura d'abord

$$\frac{\mathrm{L}}{\mu^2} = \mathrm{BC}\,x^2\mathrm{X}^2 + \mathrm{CA}\,y^2\mathrm{Y}^2 + \mathrm{AB}\,z^2\mathrm{Z}^2,$$

et en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs, et simplifiant au moyen de l'équation

$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 = -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),$$

il viendra

$$\frac{L}{\mu^2} = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2).$$

Le calcul de $\frac{1}{\mu^2}\sqrt{M^2 - 4LN}$ est plus compliqué. On a d'abord, réduction faite,

$$M^2 - 4LN = \alpha^2 m^4 + \beta^2 n^4 + \gamma^2 p^4 - 2\beta\gamma n^2 p^2 \\ - 2\gamma\alpha p^2 m^2 - 2\alpha\beta m^2 n^2,$$

puis, en remplaçant m, n, p par leurs valeurs, celle de $\frac{1}{\mu^2}\sqrt{M^2 - 4LN}$ devient

$$\sqrt{\alpha^2 x^4 X^4 + \beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2\beta\gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2 - 2\gamma\alpha z^2 x^2 Z^2 X^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 X^2 Y^2},$$

ou bien encore

$$\sqrt{(\beta z^2 - \gamma x^2)^2 (\gamma x^2 - \alpha z^2)^2 (\alpha y^2 - \beta x^2)^2} = \sqrt{X^2 Y^2 Z^2} = \pm XYZ.$$

Ce résultat, qui ne suppose pas la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

s'établit comme il suit : on met la quantité radicale sous la forme

$$(\alpha^2 x^4 X^2 - 2\alpha\gamma x^2 z^2 Z^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 Y^2) X^2 + (\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2,$$

et comme on a

$$\begin{aligned} &\beta y^2 (\gamma x^2 - \alpha z^2)^2 - \gamma z^2 (\alpha y^2 - \beta x^2)^2 \\ &\quad = \beta y^2 (\gamma^2 x^4 + \alpha^2 z^4) - \gamma z^2 (\alpha^2 y^4 + \beta^2 x^4) \\ &\quad = (\beta z^2 - \gamma y^2)(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4) \\ &\quad = X(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4), \end{aligned}$$

la quantité sous le radical est donc divisible par X^2. On prouve de même qu'elle est divisible par Y^2 et par Z^2, d'où il suit que $X^2Y^2Z^2$ est diviseur de la quantité radicale. Comme cette quantité est du douzième degré en x, y, z aussi bien que le produit $X^2Y^2Z^2$, il suffit d'ordonner pour trouver le quotient.

Dans la quantité radicale, la plus haute puissance de x se trouve dans les termes

$$\beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2\beta\gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2,$$

ou

$$(\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2 = [X(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4)]^2.$$

C'est donc $\beta^2\gamma^2 X^2 . x^8$ qui est le premier terme de la quantité radicale ordonnée par rapport à x.

Dans le produit $X^2 Y^2 Z^2$ ou $X^2(\gamma x^2 - \alpha z^2)^2(\alpha y^2 - \beta x^2)^2$, le terme en x^8 est aussi $\beta^2\gamma^2 X^2 . x^8$. Le quotient est donc l'unité.

On aura donc

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2) \\ \quad = \pm(\beta z^2 - \gamma y^2)(\gamma x^2 - \alpha z^2)(\alpha y^2 - \beta x^2). \end{array} \right.$$

Cette équation ne diffère de celle donnée par M. Painvin (*Nouvelles Annales*, p. 490, 1864) que par le double signe du second membre. Pour le voir, il suffit de remplacer A, B, C par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$; alors α, β, γ deviennent $\frac{c^2-b^2}{b^2c^2}$, $\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}$, $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$,

$$\beta z^2 - \gamma y^2 = \frac{1}{a^2}\left[(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}\right],$$

$$\gamma x^2 - \alpha z^2 = \frac{1}{b^2}\left[(b^2-c^2)\frac{z^2}{c^2} + (b^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}\right],$$

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = \frac{1}{c^2}\left[(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2} + (c^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right];$$

puis

$$A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2$$

devient

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(c^2 - b^2)^2 \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + (a^2 - e^2)^2 \frac{z^2 x^2}{c^2 a^2} + (b^2 - a^2)^2 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right];$$

de sorte qu'en multipliant par $a^2 b^2 c^2$, et prenant le signe supérieur, on a précisément le résultat de M. Painvin.

Il reste à examiner s'il faut toujours prendre le signe supérieur.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que l'équation biquadratique à quatre inconnues

$$s^2 = a^2 t^4 + b^2 u^4 + c^2 v^4 - 2bcu^2 v^2 - 2act^2 v^2 - 2abt^2 u^2$$

devient une identité en posant

$$\begin{aligned} t &= x(bz^2 - cy^2), \\ u &= y(cx^2 - az^2), \\ v &= z(ay^2 - bx^2), \\ s &= (bz^2 - cy^2)(cx^2 - az^2)(ay^2 - bx^2). \end{aligned}$$

On prouve de même qu'on peut prendre

$$\begin{aligned} t &= x(by^2 - cz^2), \\ u &= y(cz^2 - ax^2), \\ v &= z(ax^2 - by^2), \\ s &= (by^2 - cz^2)(cz^2 - ax^2)(ax^2 - by^2). \end{aligned}$$

On trouve ainsi une infinité de solutions en nombres entiers quand a, b, c sont des entiers de signe quelconque.

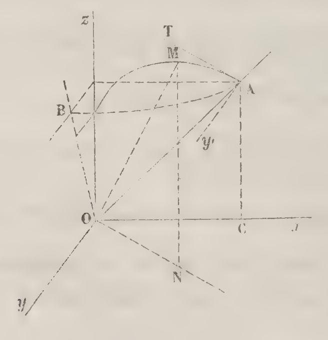
QUESTION DE LICENCE;

Solution de M. Th. DIEU,
Agrégé, Docteur ès sciences.

1. Problème de Mécanique.

Un point matériel, astreint à rester sur un cône de révolution, est sollicité par une force dirigée vers le sommet, proportionnelle à la masse du point matériel et à ses distances au sommet. Il part d'une position donnée A *avec une vitesse* v_0 *dirigée suivant une tangente* AT *au cône. Quel sera le mouvement du point matériel? On fait abstraction du frottement.*

Le sommet du cône est pris pour origine, et son axe pour axe des z; le plan zx passe par la position initiale A;



l'angle de la direction AT de la vitesse v_0 avec la tangente Ay' au parallèle AB du cône sera désigné par ε, AOz par α, AO par r_0, AC par z_0 et OC par ρ_0.

Soit M la position du point matériel à la fin d'une

durée t comptée depuis le commencement du mouvement. x, y, z représenteront les coordonnées de M, r la distance OM, ρ sa projection ON sur le plan xy, θ l'angle NOx, et v la vitesse du mobile.

Le principe de Leibnitz donne $v^2 = kr^2 + C$, ou

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (kz^2 \operatorname{séc}^2\alpha + C)\,dt^2,$$

C désignant la quantité $v_0^2 - kr_0^2$, et k la force rapportée aux unités de masse et de distance. k sera positif pour une répulsion, négatif pour une attraction.

Le principe des aires s'applique au mouvement projeté sur xy, car la réaction de la surface rencontre toujours l'axe des z. On a donc $\rho^2 d\theta = C' dt$, ou

$$(2) \qquad x\,dy - y\,dx = C'\,dt,$$

C' désignant $\rho_0^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ ou $\rho_0 v_0 \cos\varepsilon$, car $\rho_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ est la composante de v_0 suivant Ay'.

De l'équation (2) et de l'équation différentielle du cône,

$$x\,dx + y\,dy = z\,dz \operatorname{tang}^2\alpha,$$

on déduit

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = C'^2 dt^2 + z^2 dz^2 \operatorname{tang}^4\alpha.$$

Remplaçant $x^2 + y^2$ par $z^2 \operatorname{tang}^2\alpha$, $dx^2 + dy^2$ par sa valeur tirée de l'équation (1), et résolvant, il vient

$$(3) \qquad dt = \pm \frac{z\,dz.\operatorname{tang}\alpha \operatorname{séc}\alpha}{\sqrt{kz^4 \operatorname{tang}^2\alpha \operatorname{séc}^2\alpha + Cz^2 \operatorname{tang}^2\alpha - C'^2}}.$$

La quantité sous le radical serait un carré si l'on avait

$$C^2 \sin^2\alpha + 4kC'^2 \quad \text{ou} \quad (v_0^2 - kr_0^2)^2 + 4kr_0^2 v_0^2 \cos^2\varepsilon = 0,$$

ce qui exige $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ avec $v_0^2 = kr_0^2$ pour une répulsion, et

$\varepsilon = 0$ avec $v_0^2 = -kr_0^2$ pour une attraction; mais ces cas particuliers seront d'abord écartés.

En posant

$$z^2 \operatorname{tang} \alpha = u, \quad C \sin \alpha \cos \alpha = 2n \quad \text{et} \quad C' \cos \alpha = p,$$

la formule (3) se réduit à

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{ku^2 + 2nu - p^2}}.$$

Attraction. — Soit $k = -\mu^2$. On a

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{n^2}{\mu^2} - p^2 - \left(\mu u - \frac{n}{\mu}\right)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$2\mu(t + \gamma) = \mp \operatorname{arc} \cos \frac{\mu^2 u - n}{\sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}},$$

γ désignant la constante arbitraire. L'intégrale de l'équation (3), c'est-à-dire de celle qui s'en déduit par la substitution de $-\mu^2$ à k, est donc,

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang} \alpha = n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2} . \cos 2\mu(t + \gamma)$$

quel que soit le signe à prendre dans le second membre.

La condition d'avoir $z = z_0$ pour $t = 0$ donne

$$\cos 2\mu\gamma = \frac{\mu^2 z_0^2 \operatorname{tang} \alpha - n}{\sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}}.$$

Cette valeur de $\cos 2\mu\gamma$ sera entre -1 et $+1$, puisque le mouvement doit avoir lieu; c'est ce qu'on verra d'ailleurs facilement en remplaçant n et p par ce qu'ils représentent. Soit γ' l'arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2\mu}$ qui satisfait; $-\gamma'$ satisfait aussi. Le mouvement de la projection du

mobile sur Oz est déterminé par une des intégrales particulières

$$(4) \qquad \mu^2 z^2 \operatorname{tang} \alpha = n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2} . \cos 2\mu (t \mp \gamma').$$

Les valeurs de z sont croissantes ou décroissantes à partir de z_0 selon qu'on prend — ou + devant γ'; le premier signe répond donc au signe supérieur dans la formule (3), et à une vitesse initiale dirigée du côté de AB opposé au sommet, tandis que le second répond au signe inférieur dans la même formule et à une vitesse initiale dirigée du côté du sommet ou suivant Ay'.

Quel que soit le signe qu'on doive prendre dans la formule (4) :

1° *Le mobile ira de sa position initiale jusqu'à un des plans situés du côté des z positifs, représentés par*

$$(5) \qquad \mu^2 z^2 \operatorname{tang} \alpha = n \pm \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2},$$

puis de ce plan à l'autre, et ainsi de suite. S'il va d'abord vers le plan le plus éloigné du sommet, il y arrive pour $t = \gamma'$; *s'il va d'abord au contraire vers le plan le plus voisin du sommet, il y arrive pour* $t = \frac{\pi}{2\mu} - \gamma'$; *enfin la durée du passage d'un de ces plans à l'autre est toujours* $\frac{\pi}{2\mu}$.

2° *z reprend périodiquement les mêmes valeurs pour des valeurs de t en progression par différence de raison égale à* $\frac{\pi}{\mu}$, *à partir d'un instant quelconque.*

De l'équation (4) et de $\rho^2 d\theta = C' dt$ qui revient à $z^2 \operatorname{tang} \alpha . d\theta = \frac{p}{\sin \alpha} dt$, on tire

$$d\theta = \frac{p\mu^2}{\sin \alpha} \frac{dt}{n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2} . \cos 2\mu (t \mp \gamma')},$$

Posant

$$\left(n - \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}\right) = a^2\left(n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}\right),$$

cette formule se ramène à

$$d\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{d[a \operatorname{tang}\mu(t \mp \gamma')]}{1 + a^2 \operatorname{tang}^2\mu(t \mp \gamma')},$$

dont l'intégrale, prise de telle sorte que $\theta = 0$ réponde à $t = 0$, est

$$(6)\ \theta = \frac{1}{\sin\alpha}\left\{\text{arc tang}[a \operatorname{tang}\mu(t \mp \gamma')] \pm \text{arc tang}(a \operatorname{tang}\mu\gamma')\right\}.$$

D'après cette formule, où l'on doit adopter les signes supérieurs ou inférieurs, respectivement associés à ceux des formules (4) et (5), selon que le mobile s'éloigne ou se rapproche d'abord du sommet :

1° *Si le mobile s'éloigne d'abord du sommet, on a* $\theta = \dfrac{\text{arc tang}(a \operatorname{tang}\mu\gamma')}{\sin\alpha}$ *lorsqu'il arrive sur le premier des plans* (5), *et si au contraire il se rapproche d'abord du sommet, on a* $\theta = \dfrac{1}{\sin\alpha}\left[\dfrac{\pi}{2} - \text{arc tang}(a \operatorname{tang}\mu\gamma')\right]$ *lorsqu'il arrive sur le second de ces plans. Pendant que le mobile passe de l'un à l'autre,* θ *augmente constamment de* $\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$.

2° θ *croît toujours de* $\dfrac{\pi}{\sin\alpha}$ *dans des intervalles de temps successifs égaux à* $\dfrac{\pi}{\mu}$ *à partir d'un instant quelconque.*

En rapprochant cette dernière conclusion de son analogue relative à z, on voit que :

Le mouvement considéré à partir d'un instant quelconque est périodique. La durée de la période est $\frac{\pi}{\mu}$.

A la fin d'une période le mobile se trouve sur le même parallèle qu'au commencement, mais dans une position différente. Ses vitesses au commencement et à la fin ont la même valeur, et leurs directions font des angles égaux, dans le même sens, avec le parallèle.

Si $\frac{\pi}{\sin\alpha}$ était contenu un nombre entier de fois dans un multiple $2N\pi$ de 2π, c'est-à-dire si $2N\sin\alpha$ était un nombre entier N', après une durée $\frac{N'\pi}{\mu}$ écoulée à partir d'un instant quelconque, z, r, $\frac{dz}{dt}$ et v auraient repris les mêmes valeurs, tandis que θ aurait augmenté de $2N\pi$; le mobile serait donc dans la même position et aurait la même vitesse en grandeur et en direction qu'à l'instant à partir duquel on le considère. Dans ce cas seulement, la trajectoire est une courbe finie.

Quand $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire pour une vitesse initiale dirigée suivant Ay', l'équation (5) donne $z = z_0$ et $z = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}$ ou $z_0 \cdot \frac{v_0}{\mu r_0}$. Selon qu'on a $v_0 > \mu r_0$ ou $v_0 < \mu r_0$, le mobile s'éloigne d'abord du sommet ou s'en rapproche.

Si avec $\varepsilon = 0$ on a $v_0 = \mu r_0$, les plans (5) se confondent tous deux avec celui du parallèle AB, et cela indique que le mobile décrit ce parallèle. Dans ce cas particulier, en effet, la valeur (3) de dt serait imaginaire si l'on n'avait toujours $z = z_0$, car la quantité sous le radical, (substitution faite de $-\mu^2$ à k), se réduit à

$$-\mu^2 \operatorname{tang}^2\alpha \operatorname{séc}^2\alpha (z - z_0)^2.$$

L'équation (1) donne $\nu = \nu_0$, et l'équation (2)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C'}{\rho_0^2} = \frac{\nu_0}{\rho_0}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{\nu_0}{\rho_0} t.$$

Répulsion. — Soit $k = \mu^2$. On a

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{\left(\mu u + \frac{n}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{n^2}{\mu^2} + p^2\right)}}.$$

Posant $\mu^2 u + n = \xi \sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}$, il vient

$$2\mu\, dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

dont l'intégrale est

$$2\mu(\gamma \pm t) = l\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right),$$

γ désignant la constante arbitraire. On tire de là

$$\xi = \frac{1}{2}\left(e^{2\mu(\gamma \pm t)} + e^{-2\mu(\gamma \pm t)}\right).$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (3), substitution faite de μ^2 à k, est

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}\left(e^{2\mu(\gamma \pm t)} + e^{-2\mu(\gamma \pm t)}\right) - n.$$

Pour avoir l'intégrale particulière qui convient au problème, il suffit de déterminer γ par les deux formules

$$\xi_0 = \frac{\mu^2 z_0^2 \operatorname{tang}\alpha + n}{\sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\mu} \cdot l\left(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 1}\right).$$

Quand le mobile se rapproche d'abord du sommet du cône, il faut prendre les signes inférieurs; alors z décroît jusqu'à la valeur positive donnée par

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{n^2 + \mu^2 p^2} - n,$$

puis croît ensuite indéfiniment. Quand au contraire le mobile s'éloigne d'abord du sommet, il faut prendre les signes supérieurs, et alors z croît toujours à partir de sa valeur initiale.

NOTE

sur un article inséré dans les Nouvelles Annales de Mathématiques et relatif à la publication intitulée :

Passage du Traité de la Musique d'Aristide Quintilien, etc. (*)

(Extrait des *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XIX, année XIX, séance du 8 avril 1866.)

L'auteur d'un article inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (avril 1866, p. 189, l. 1-24) s'étonne qu'un homme qui s'occupe de l'histoire de l'Arithmétique ait pu attacher à des textes grecs où certaines propriétés des nombres reçoivent une application superstitieuse, assez d'importance pour prier deux hellénistes de traduire et d'expliquer un de ces textes, et pour être curieux de connaître l'époque de l'auteur. Le critique paraît avoir oublié que, lorsqu'il s'agit de faire l'histoire d'une connaissance, il faut bien la saisir dans les textes les plus anciens où on la rencontre, lors même qu'elle y serait appliquée à un usage puéril. C'est ainsi que l'histoire de l'Astronomie et celle de la Chimie trouvent des documents précieux dans le fatras des astrologues et des alchimistes. C'est ainsi que des notions assez avancées sur les pro-

(*) Voir *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XVIII, anno XVIII, 1865-66, etc., sessione VII dell' 11 giugno 1865, p. 365-376.

priétés des nombres se trouvent impliquées dans certaines rêveries antiques sur leurs significations mystérieuses et sur les influences chimériques qu'on leur attribuait, ou bien dans certaines formules bizarrement énigmatiques sous lesquelles on se faisait un jeu de cacher des notions mathématiques. C'est ainsi que le *nombre nuptial* de Platon et les remarques subtiles d'Aristide Quintilien sur les nombres qui représentent les sons musicaux et sur les rapports prétendus de ces nombres avec certains phénomènes physiologiques, peuvent jouer un rôle sérieux dans l'histoire antique de diverses propriétés de nombres, et notamment de l'égalité $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. En effet, cette égalité se trouve certainement impliquée dans le passage de Platon sur le *nombre nuptial*, comme on en peut voir la preuve donnée par M. Vincent dans le tome XVI des *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Roi* (*), et par moi dans un article de la *Revue archéologique* (**). Cette même égalité se trouve aussi dans le passage d'Aristide Quintilien traduit et commenté dans la publication mentionnée ci-dessus, comme on en peut voir la preuve dans cette publication même.

TH. HENRI MARTIN.

Note du Rédacteur. — La réputation de M. le prince Boncompagni et celles de MM. H. Martin et Vincent sont trop solidement établies pour avoir rien à redouter d'une phrase maladroite qui, dans son extrême concision, ne rendait point notre pensée. Nous n'avons jamais eu l'intention de refuser à ces messieurs la justice qui est due à leurs beaux travaux. Nous insérons d'autant plus volontiers la réclamation de M. H. Martin, qu'elle renferme une opinion fort judicieuse et qui ne s'applique pas seulement aux travaux d'érudition. C'est en attaquant les plus petits détails, qu'on vient à bout des plus grandes questions. P.

(*) Paris, 1847; in-4, p. 184, lig. 9-36, p. 185-193, et p. 194, lig. 2-19.
(**) XIIIe année, 15e livraison, 15 août 1856, p. 257-287.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 613;

Par M. Ar. VIANT (*),
Au Prytanée Militaire.

On donne une conique et un point fixe O *dans son plan. Du point* O *on mène deux droites* OA, OB *perpendiculaires entre elles, qui coupent la conique en* A *et* B. *On joint le point* A *au point* B, *et l'on mène en ces points les tangentes* AT, BT *à la conique; on projette le point* O *sur les trois côtés du triangle* ABT; *par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence; démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.*

La circonférence des projections du point O peut être considérée comme la podaire, par rapport à O, d'une conique tangente aux trois côtés du triangle ABT et ayant un foyer au point O. Cherchons l'enveloppe de ces coniques.

La transformation par les polaires réciproques, lorsque la courbe directrice est une circonférence admettant le

(*) La question 613 a déjà été résolue (numéro de juin, p. 277). La solution de M. Viant n'a pas été mentionnée. C'est une omission que nous réparons en insérant cette solution dans le présent numéro. Elle diffère d'ailleurs en plusieurs points de celle qui a été donnée par M. Bauquenne.

point O pour centre, remplace les coniques focales, inscrites dans le triangle variable ABT, par des cercles circonscrits aux triangles polaires conjugués des triangles ABT.

Soit *abt* un de ces nouveaux triangles (les petites lettres désignant les pôles des côtés opposés aux sommets de même nom). Le triangle *abt*, relativement à la conique transformée de la conique donnée, est placé comme le triangle ABT relativement à celle-ci. De plus, OA, OB étant rectangulaires, les tangentes *at*, *bt* à la transformée *ab* le sont pareillement.

Or, la circonférence circonscrite au triangle *abt* est évidemment tangente en *t* à la circonférence fixe d'où l'on voit la conique *ab* sous un angle droit (*). Par suite, la conique transformée de la circonférence circonscrite au triangle *abt*, c'est-à-dire la conique mobile du foyer O, reste toujours tangente à une conique qui a le point O pour foyer, et le contact a lieu sur la polaire AB de *t* (**).

Revenant à la question proposée, on voit que la circonférence des projections du point O touche constamment une circonférence fixe, et que le contact a lieu au

---

(*) La conique *ab*, transformée de la conique donnée AB, touche les côtés *at*, *bt* du triangle *abt* aux points *a* et *b*. Le centre *c* de cette conique *ab* est sur la droite menée du point *t* au milieu *m* de la corde des contacts *ab*. Le point *m* est le centre de la circonférence circonscrite au triangle *abt*, parce que l'angle *atb* est droit. Les deux circonférences dont il s'agit passent par le point *t*, leurs centres *m* et *c* sont sur une droite menée par ce point; donc elles sont tangentes l'une à l'autre au point *t*.

(**) Cette dernière conique est l'enveloppe des cordes AB de la conique donnée, qui sont vues du point O sous un angle droit. L'un de ses foyers coïncide avec le point O, la directrice correspondante à ce foyer est la polaire du point O par rapport à la conique donnée. Son centre est à l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point O sur la polaire et de la droite qui unit les milieux de deux cordes rectangulaires menées par le point O dans la conique donnée. G.

pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB (*), ce qui démontre accidentellement ce théorème connu : *Le lieu des projections d'un point sur une corde* AB *vue de ce point sous un angle droit est une circonférence.*

Note. — M. Viant remarque qu'au moyen de la transformation par polaires réciproques, en prenant pour courbe directrice un cercle quelconque dont le centre soit autre que le point O, on peut déduire du théorème démontré un nombre illimité d'autres théorèmes, ce qui est incontestable. Mais, comme le remarque aussi M. Viant, les propriétés des sections coniques qui donnent lieu à de longs énoncés ne présentent que peu d'intérêt.

Question 675

(voir 2e série, t. II, p. 479);

PAR M. LAISANT,
Lieutenant du Génie, Licencié ès sciences.

Soient ABC *un triangle isocèle dont chacun des angles* A, B *a pour mesure* arc tang $2\sqrt{2}$; *et* p, q, r *les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets* A, B, C *sur une ligne droite quelconque située dans le plan du triangle; mener par un point donné une droite telle, que la somme algébrique*

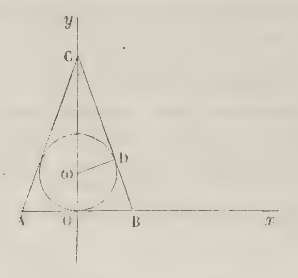
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2}{r}=0. \tag{1}$$

G. J. OXFORD.

Prenons la base AB du triangle pour axe des x, la hau-

(*) Effectivement, il est facile de voir que si deux coniques ayant pour foyer commun le point O touchent une droite AB au même point, leurs podaires relatives au foyer commun O sont elles-mêmes tangentes au point de rencontre de AB et de la perpendiculaire abaissée de O sur cette droite. Or, la podaire de la conique enveloppe des cordes AB est évidemment une circonférence fixe; par conséquent, la proposition est démontrée. G.

teur OC pour axe des y; soit h cette hauteur OC. Soit $a = OA = OB$. On aura $h = 2a\sqrt{2}$ d'après l'hypothèse.



Soit maintenant $y = mx + n$ l'équation d'une droite située dans le plan du triangle. Les distances p, q, r de cette droite aux trois sommets A, B, C sont respectivement proportionnelles à $+ma - n$, $-ma - n$, $h - n$. On peut remplacer p, q, r par des quantités proportionnelles dans l'équation (1), à cause de l'homogénéité de cette équation, et nous exprimerons que la droite satisfait à la condition en écrivant

$$\frac{1}{ma - n} + \frac{1}{-ma - n} + \frac{2}{h - n} = 0, \tag{2}$$

ou, par transformation,

$$m^2a^2 + nh - 2n^2 = 0,$$

ou, à cause de $h^2 = 8a^2$,

$$\frac{1}{8}m^2h^2 + nh - 2n^2 = 0,$$

$$m^2h^2 = 16n^2 - 8nh,$$

$$(m^2 + 1)h^2 = 16n^2 - 8nh + h^2 = (h - 4n)^2,$$

$$h = \pm\frac{h - 4n}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$\frac{h}{4} = \pm\frac{\frac{h}{4} - n}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Le premier membre est constant, le second membre exprime la distance de la droite $y = mx + n$ au point $x = 0$, $y = \frac{h}{4}$. Donc, toute droite satisfaisant à la condition, est tangente à un cercle ayant son centre en ω au quart de la hauteur, et un rayon égal à $\frac{h}{4}$. C'est le cercle inscrit dans le triangle, car

$$\omega D = \omega C . \cos C\omega D = \frac{3}{4} h \times \frac{1}{\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{4} h.$$

Il est clair que cette propriété renferme la solution de la question, solution double en général, mais qui pourra devenir unique, ou même disparaître, suivant la position du point donné.

Généralisation. — On peut se proposer de généraliser le problème en en modifiant un peu l'énoncé. Supposons l'angle à la base quelconque; de plus, mettons un nombre quelconque μ à la place de 2 dans l'équation de condition, et voyons dans quels cas la solution trouvée ci-dessus s'appliquera ici. L'équation (2) deviendra

$$\frac{1}{ma - n} + \frac{1}{-ma - n} + \frac{\mu}{h - n} = 0$$

ou

$$\mu m^2 a^2 + 2nh - (\mu + 2) n^2 = 0.$$

Soit k la tangente de l'angle à la base, on a

$$h = ak,$$

et, par suite,

$$\mu m^2 \frac{h^2}{k^2} + 2nh - (\mu + 2) n^2 = 0,$$

$$m^2 h^2 + \frac{2k^2}{\mu} nh - \frac{k^2}{\mu} (\mu + 2) n^2 = 0,$$

$$m^2h^2 = \frac{k^2}{\mu}(\mu+2)n^2 - \frac{2k^2}{\mu}nh,$$

$$(m^2+1)h^2 = h^2 - \frac{2k^2}{\mu}nh + \frac{k^2}{\mu}(\mu+2)n^2.$$

Cherchons la condition pour que le second membre soit un carré parfait. C'est

$$\frac{4k^4}{\mu^2} = 4\frac{k^2}{\mu}(\mu+2)$$

ou

$$k^2 = \mu(\mu+2),$$

$$(3) \qquad \mu^2 + 2\mu - k^2 = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, il vient

$$(m^2+1)h^2 = \left(h - \frac{k^2 n}{\mu}\right)^2,$$

$$\frac{\mu h}{k^2} = \pm \frac{\frac{\mu h}{k^2} - n}{\sqrt{m^2+1}}.$$

La droite $y = mx + n$ satisfaisant à la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\mu}{r} = 0$ est alors tangente à un cercle de rayon $\frac{\mu h}{k^2}$ dont le centre a pour coordonnées $x = 0, y = \frac{\mu h}{k^2}$.

Ce cercle est le cercle inscrit au triangle, si on prend pour μ la racine positive μ_1 de l'équation (3). Si on prend au contraire la racine négative μ_2, on a le cercle tangent aux trois côtés du triangle, mais au-dessous de la base. Des calculs très-simples font voir tout cela. Voici un tableau de quelques valeurs correspondantes de k et de μ, comprenant des valeurs entières de cette dernière quantité :

μ_1	μ_2	k
$+1$	-3	$\sqrt{3}$
$+2$	-4	$\sqrt{8}$
$+3$	-5	$\sqrt{15}$
$+4$	-6	$\sqrt{24}$
....	....	...

On voit, par exemple, que dans la question proposée on aurait, en menant une tangente au cercle exinscrit dont il vient d'être question, la solution répondant à la condition

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{4}{r}=0.$$

Question 764;

PAR M. ROQUE,
Grenadier au 49[e] de ligne.

Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné M, *et qui passent par deux points donnés* F, F', *sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points donnés* F *et* F', *et qui passe par le premier* M.

Si des points F, F' comme centres, avec FM, F'M pour rayons, je décris des cercles, et si je mène les deux tangentes communes à ces cercles, j'aurai les directrices de deux paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé;

leurs axes seront parallèles aux rayons menés aux points de contact.

Soient O et OA le centre et l'une des asymptotes de l'hyperbole dont F, F' sont les foyers et qui passe par le point M; on aura

$$\cos \mathrm{AOF} = \frac{a}{c} = \frac{\mathrm{F'M} - \mathrm{FM}}{\mathrm{FF'}}.$$

D'autre part, soient FK le rayon mené du centre F au point de contact K de la tangente commune aux deux cercles, et O' le centre de similitude de ces deux courbes, on aura

$$\cos \mathrm{KFO'} = \frac{\mathrm{FK}}{\mathrm{FO'}} = \frac{\mathrm{F'M} - \mathrm{FM}}{\mathrm{FF'}};$$

donc FK est parallèle à OA. Ainsi, les axes des deux paraboles sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions de MM. Laisant; A. Gille, élève de l'École Sainte-Geneviève; Camille Massing, élève de l'École Centrale; C. B., de Gand; J. Graindorge, élève ingénieur des Mines à Liége; Biny, élève au lycée de Toulouse; A. Robin et F. Gaston, du lycée de Grenoble; J. Rakouski; Camille Laduron, élève à l'École des Mines de Liége; et P. H.

Question 766;

PAR M. LAISANT,

Lieutenant du Génie, Licencié ès sciences.

Les deux ellipses de Cassini, données par les équations

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 = b^4,$$
$$(x^2+y^2)^2 - 2a'^2(x^2-y^2) + a'^4 = b'^4,$$

se coupent orthogonalement, pourvu que l'on ait

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$

(STREBOR.)

Soient x, y les coordonnées d'un point M commun

aux deux courbes, on aura, en ajoutant leurs équations,

$$(1)\quad 2(x^2+y^2)^2-2(a^2+a'^2)(x^2-y^2)+a^4+a'^4-(b^4+b'^4)=0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la première ellipse au point M est

$$\alpha = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

ou, réduction faite,

$$\alpha = -\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-a^2}{x^2+y^2+a^2}.$$

De même, pour la seconde courbe,

$$\alpha' = -\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-a'^2}{x^2+y^2+a'^2}.$$

En multipliant, on a

$$\alpha\alpha' = \frac{x^2}{y^2}\cdot\left[\frac{(x^2+y^2)^2-(a^2+a'^2)(x^2+y^2)+a^2a'^2}{(x^2+y^2)^2+(a^2+a'^2)(x^2+y^2)+a^2a'^2}\right].$$

Remplaçant $(x^2+y^2)^2$ par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient

$$\alpha\alpha' = \frac{x^2}{y^2}\left[\frac{-4(a^2+a'^2)y^2-(a^2-a'^2)^2+b^4+b'^4}{4(a^2+a'^2)x^2-(a^2-a'^2)^2+b^4+b'^4}\right].$$

Cette expression se réduit à -1 dans l'hypothèse

$$(a^2-a'^2)^2=b^4+b'^4,$$

de sorte qu'au point (x, y) considéré, les deux courbes se couperont orthogonalement.

Cette démonstration suppose, il est vrai, l'existence du point commun M; mais, en examinant les formes respectives des deux courbes, on arrive facilement à voir qu'elles se coupent effectivement lorsque $(a^2-a'^2)^2=b^4+b'^4$.

Car, de

$$(a^2-a'^2)^2=b^4+b'^4,$$

on tire, en supposant $a > a'$,

$$b^2 - b'^2 < a^2 - a'^2 < b^2 + b'^2, \quad \text{si} \quad b > b',$$

ou bien

$$b'^2 - b^2 < a^2 - a'^2 < b^2 + b'^2, \quad \text{si} \quad b < b'.$$

Dans le premier cas, on a

$$a'^2 - b'^2 < a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2.$$

Alors, suivant que $a^2 - b^2$ sera $>$ ou $<$ o, les deux courbes seront chacune formées de deux ovales séparés, ou continues toutes deux. Dans la première hypothèse elles se coupent, car les termes des inégalités ci-dessus sont les carrés des abscisses des points de rencontre avec l'axe des x.

Dans la seconde hypothèse, les deux courbes se coupent encore, car

$$b^2 - a^2 < b'^2 - a'^2,$$

et ces termes sont les carrés des ordonnées des points de rencontre avec l'axe des y.

Lorsqu'on a

$$b < b',$$

il vient

$$b'^2 + a'^2 < a^2 + b^2, \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2.$$

En outre,

$$a^2 - b^2 > a'^2 - b'^2,$$

puisque

$$a > a' \quad \text{et} \quad b < b'.$$

Donc,

$$a'^2 - b'^2 < a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2,$$

comme précédemment, et on arrive aux mêmes conclusions.

Note. — MM. J. Graindorge, élève ingénieur des Mines à Liége; C. B.,

de Gand; C. Massing, élève de l'École Centrale; Camille Laduron, élève de l'École des Mines de Liége; E. Canel, élève du lycée de Douai; P. Capin, du lycée de Montpellier; et E. Muzeau ont démontré qu'en un point commun aux deux courbes, leurs tangentes sont rectangulaires.

L'existence des points communs *réels* résulte de la résolution des deux équations proposées, en ayant égard à l'hypothèse

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\omega + a^4 - b^4 = 0,$$
$$\rho^4 - 2a'^2\rho^2\cos 2\omega + a'^4 - b'^4 = 0;$$

leur addition donne

$$\rho^4 - (a^2 + a'^2)\rho^2\cos 2\omega + a^2a'^2 = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad \cos 2\omega = \frac{\rho^4 + a^2a'^2}{(a^2 + a'^2)\rho^2}.$$

Par suite,

$$\rho^4 - \frac{2a'^2(\rho^4 + a^2a'^2)}{a^2 + a'^2} + a'^4 - b'^4 = 0;$$

$$(2) \qquad \rho^4 = a'^4 + \frac{b'^4(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} = a^4 - \frac{b^4(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}.$$

En admettant, ce qui est permis, qu'on ait $a^2 > a'^2$, l'équation (2) détermine pour ρ^2 une valeur réelle et positive comprise entre a'^2 et a^2, et il en résulte une valeur de $\cos 2\omega$ réelle et moindre que l'unité. Car l'inégalité

$$\frac{\rho^4 + a^2a'^2}{(a^2 + a'^2)\rho^2} < 1$$

revient à

$$\rho^4 - (a^2 + a'^2)\rho^2 + a^2a'^2 < 0,$$

d'où

$$(\rho^2 - a'^2)(\rho^2 - a^2) < 0.$$

Cette dernière condition est évidemment remplie, puisque la valeur de ρ^2 est comprise entre a'^2 et a^2. G.

Question proposée;

Solution de M. L. AMALRIC,

Élève de l'institution Sainte-Barbe (cours du lycée Louis-le-Grand).

Un cercle se meut en restant tangent à une ellipse, de manière à avoir avec cette courbe un système de tan-

gentes communes parallèles; quel est le lieu de son centre?

Je prends pour axes de coordonnées les deux axes de l'ellipse; l'origine est le centre O de cette courbe. J'appelle X, Y les coordonnées du centre M d'un cercle ayant en commun avec l'ellipse deux tangentes parallèles; la direction de ces tangentes est celle du diamètre OM; et la distance du centre O à ces mêmes tangentes est le rayon du cercle. Je puis donc écrire immédiatement l'équation de ce cercle

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \frac{a^2 Y^2 + b^2 X^2}{X^2 + Y^2},$$

$2a$, $2b$ étant les longueurs des axes de l'ellipse.

Comme je discuterai plus tard l'équation du lieu du centre en coordonnées polaires, j'écris

$$X^2 + Y^2 = \rho^2, \quad X = \rho \cos\omega, \quad Y = \rho \sin\omega,$$

et je pose

$$a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega = M^2;$$

de là l'équation du cercle sous cette autre forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2Xx - 2Xy + \rho^2 - M^2 = 0.$$

Tous les cercles qu'elle représente doivent être tangents à l'ellipse; je puis donc former l'équation en λ relative à l'équation (1) et à l'équation de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0;$$

et, en exprimant que cette équation en λ a une racine double, j'aurai une équation $f(X, Y) = 0$ qui sera celle du lieu demandé.

J'ai ainsi

$$x^2(\lambda b^2 + 1) + y^2(\lambda a^2 + 1) - 2Xx - 2Yy - \lambda a^2 b^2 + \rho^2 - M^2 = 0,$$

et

$$(\lambda b^2 + 1)(\lambda a^2 + 1)(\rho^2 - M^2 - \lambda a^2 b^2)$$
$$- (\lambda b^2 + 1) Y^2 - (\lambda a^2 + 1) X^2 = 0.$$

J'ordonne par rapport à λ, il vient

$$(2) \quad \begin{cases} a^4 b^4 \lambda^3 + a^2 b^2 (a^2 + b^2 + M^2 - \rho^2) \lambda^2 \\ \quad + [a^2 b^2 + a^2 X^2 + b^2 Y^2 + (a^2 + b^2)(M^2 - \rho^2)] \lambda + M^2 = 0. \end{cases}$$

La relation $f(X, Y) = 0$, qui exprimerait que cette équation a deux racines égales, serait très-compliquée, puisqu'elle est ordinairement considérée comme le résultat de l'élimination de λ entre deux équations du second degré, obtenues en dérivant l'équation précédente par rapport à λ, et à une nouvelle variable introduite de manière à rendre l'équation homogène.

Dans ce cas, à cause de la forme particulière de l'équation (2), on peut, en transformant les coefficients, faire apparaître une de ses racines.

Le coefficient de λ peut s'écrire

$$(a^2 + b^2) M^2 + a^2 b^2 + a^2 X^2 + b^2 Y^2 - (a^2 + b^2)(X^2 + Y^2)$$
$$= (a^2 + b^2) M^2 + a^2 b^2 - b^2 X^2 - a^2 Y^2$$
$$= (a^2 + b^2 - \rho^2) M^2 + a^2 b^2.$$

Je pose

$$a^2 + b^2 - \rho^2 + M^2 = N^2,$$

et alors l'équation (2) devient

$$a^4 b^4 \lambda^3 + a^2 b^2 N^2 \lambda^2 + [a^2 b^2 + (N^2 - M^2) M^2] \lambda + M^2 = 0,$$

ou

$$(3) \qquad (a^2 b^2 \lambda + M^2)[a^2 b^2 \lambda^2 + (N^2 - M^2) \lambda + 1] = 0.$$

Cette équation peut avoir une racine double de deux manières :

1° Quand l'équation du second degré

$$a^2b^2\lambda^2 + (N^2 - M^2)\lambda + 1 = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$(N^2 - M^2)^2 - 4a^2b^2 = 0,$$
$$(N^2 - M^2 + 2ab)(N^2 - M^2 - 2ab) = 0,$$

ou, parce que

$$N^2 - M^2 = a^2 + b^2 - \rho^2,$$
$$[(a+b)^2 - \rho^2][(a-b)^2 - \rho^2] = 0.$$

De là

$$\rho = (a+b) \quad \text{et} \quad \rho = (a-b).$$

Ainsi les deux circonférences C, C′, concentriques à l'ellipse, et ayant respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des axes de cette courbe, appartiennent au lieu des centres.

2° La racine $-\dfrac{M^2}{a^2b^2}$ de l'équation (3) peut aussi être racine de l'équation du second degré

$$a^2b^2\lambda^2 + (N^2 - M^2)\lambda + 1 = 0$$

et alors l'équation en λ aura bien encore une racine double. D'où la condition

$$M^4 - M^2(N^2 - M^2) + a^2b^2 = 0$$

ou

$$M^2[M^2 - (N^2 - M^2)] + a^2b^2 = 0,$$

et l'équation correspondante est

$$(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)[a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - (a^2 + b^2) + \rho^2] + a^2b^2 = 0$$

ou

$$(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)(\rho^2 - a^2\cos^2\omega - b^2\sin^2\omega) + a^2b^2 = 0,$$

$$\rho^2 = \frac{c^4\sin^2\omega.\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}.$$

Cette dernière représente une courbe S facile à construire.

A priori on voit bien que les quatre points où les deux circonférences C, C′ rencontrent les axes de l'ellipse appartiennent au lieu cherché (*); de même, on voit que le centre de l'ellipse est un point multiple qui correspond aux cercles concentriques à l'ellipse et tangents à cette courbe en ses sommets. Il resterait à voir si la courbe trouvée S fait bien réellement partie du lieu des centres, ou si elle est due à un fait purement algébrique (**).

(*) Un point quelconque

$$x=(a+b)\cos\omega,\quad y=(a+b)\sin\omega$$

de la circonférence C est le centre d'un cercle qui touche l'ellipse au point

$$x=a\cos\omega,\quad y=b\sin\omega$$

et dont le rayon est $\sqrt{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$ ou M. Le même cercle a, en commun avec l'ellipse, deux tangentes parallèles; son centre appartient donc au lieu cherché.

De même, en prenant pour centre un point quelconque

$$x=(a-b)\cos\omega,\quad y=(a-b)\sin\omega$$

de la circonférence C′, et pour rayon $\sqrt{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$, le cercle décrit touchera l'ellipse au point

$$x=a\cos\omega,\quad y=-b\sin\omega;$$

il aura de plus, avec l'ellipse, deux tangentes parallèles. Ainsi le centre de ce cercle est un point du lieu.

(**) La courbe S, représentée par l'équation

$$\rho^2=\frac{c^4\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega},$$

est le lieu géométrique des projections du centre de l'ellipse sur les normales à l'ellipse; par conséquent, la courbe S fait partie du lieu cherché.

G.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE

donnée en 1864 aux candidats à l'École Polytechnique (2e sujet);

SOLUTION DE M. CH. CAYLA,
Répétiteur au collége Rollin.

On donne sur un plan une circonférence (O), *un point* A *et une droite* (D). *Du point* A *on mène une droite qui coupe* (D) *en un point* B; *sur* AB *comme diamètre on décrit une circonférence; cette circonférence et la circonférence* O *ont pour corde commune une droite qui rencontre* AB *en un point* M. *On demande le lieu décrit par le point* M, *lorsque la droite* AB *tourne autour du point* A.

1° *Le point* A *et la circonférence* O *étant fixes, examiner quelles sont les différentes formes que présente le lieu* (M) *lorsque l'on considère des droites telles que* (D), *parallèles entre elles.*

2° *Faire voir que les différentes courbes ainsi obtenues passent par quatre points fixes et ont leurs axes parallèles.*

Je prends pour axes de coordonnées la perpendiculaire et la parallèle menées par le point A à la droite donnée D. Soient a et b les coordonnées du centre O, l'équation de la circonférence donnée est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p^2 = 0, \tag{1}$$

en posant

$$p^2 = a^2 + b^2 - r^2.$$

La sécante mobile AB a pour équation

$$y = mx. \tag{2}$$

L'équation du second cercle dont le centre est au milieu de AB est

$$(3)\qquad x^2 + y^2 - \alpha x - m\alpha y = 0,$$

α étant l'abscisse de la droite (D).

La corde commune, ou l'axe radical des deux circonférences, a pour équation

$$(4)\qquad (2a - \alpha)x + (2b - m\alpha)y - p^2 = 0.$$

Éliminant m entre les équations (2) et (4), on a l'équation du lieu

$$(5)\qquad (2a - \alpha)x^2 + 2bxy - \alpha y^2 - p^2 x = 0$$

Donc le lieu du point est une conique.

Discussion. — La quantité dont le signe caractérise le genre de la conique est

$$b^2 + \alpha(2a - \alpha) \quad \text{ou} \quad -[\alpha - (a + d)][\alpha + (d - a)],$$

d représentant la distance OA.

En considérant α comme une coordonnée courante, chacun des facteurs, égalé à zéro, représente une parallèle à l'axe des y, et qu'il est facile de construire. On a ainsi deux droites D', D'' parallèles à D.

Si la droite D est située entre D', D'', le lieu est une hyperbole; si elle est extérieure à ces deux parallèles, le lieu est une ellipse. Enfin, si elle coïncide avec l'une de ces parallèles, le lieu est une parabole.

Quand le lieu est une ellipse, cette ellipse se réduit à un point, qui est l'origine, pour une valeur infiniment grande de α, et elle devient une circonférence lorsque $b = 0$ et $a = 0$. Dans ce cas le point A est le centre du cercle donné.

Si la droite D se confond avec l'axe des y, on aura

$\alpha = 0$, et l'équation du lieu se réduira à

$$2ax^2 + 2bxy - p^2x = 0.$$

Cette dernière équation représente le système des deux droites $x = 0$, $ax + by = \frac{p^2}{2}$.

Lorsque $\alpha = a$, la droite D passe par le centre du cercle donné, et le lieu représenté par l'équation (5) est une hyperbole équilatère.

Le lieu est une parabole lorsqu'on a

$$\alpha = a + d \quad \text{ou} \quad \alpha = a - d.$$

L'équation (5) peut s'écrire

$$\alpha(x^2 + y^2) - x(2ax + 2by - p^2) = 0;$$

sous cette forme on reconnaît l'équation générale des coniques passant par les quatre points d'intersection de la conique $x^2 + y^2 = 0$ avec les droites

$$x = 0, \quad ax + by - \frac{p^2}{2} = 0.$$

Donc, les différentes coniques obtenues en faisant varier α sont tangentes à l'origine à l'axe des y, et elles passent, en outre, par deux points imaginaires conjugués dont il serait facile d'avoir les coordonnées.

L'équation qui fait connaître les coefficients angulaires des axes est

$$u^2 + 2\frac{a}{b}u - 1 = 0.$$

On voit que quand la droite D se déplace parallèlement à elle-même, les directions des axes des coniques ne changent pas. Les coefficients angulaires des axes ont pour valeurs $\frac{-a \pm d}{b}$. L'équation qui fait connaître les coef-

ficients angulaires des axes montre que ces coefficients ne dépendent que du rapport $\frac{a}{b}$; par conséquent les axes des coniques conservent toujours les mêmes directions quand le centre O du cercle donné se déplace sur la droite AO.

Il est facile d'avoir le lieu des centres des coniques obtenues quand α varie. On reconnaît que c'est une hyperbole tangente au point A à l'axe des abscisses.

NOTE

sur le moyen de ramener une équation quelconque du quatrième degré à une équation réciproque du même degré;

Par M. Roger ALEXANDRE.

Le type général des équations du quatrième degré est

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Si nous y remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue et h une indéterminée, nous aurons une équation de la même forme en y,

$$y^4 + p' y^3 + q' y^2 + r' y + s' = 0,$$

dans laquelle p', q', r', s' sont des fonctions de h.

Divisons tous les termes par s', nous aurons

$$\frac{y^4}{s'} + \frac{p' y^3}{s'} + \frac{q' y^2}{s'} + \frac{r' y}{s'} + 1 = 0.$$

Changeons encore d'inconnue, et faisons dans cette équation

$$\frac{y}{s'^{\frac{1}{4}}} = z,$$

elle deviendra

$$z^4 + \frac{p'}{s'^{\frac{1}{4}}} z^3 + \frac{q'}{s'^{\frac{1}{2}}} z^2 + \frac{r'}{s'^{\frac{3}{4}}} z + 1 = 0.$$

Nous avons déjà obtenu l'égalité des coefficients extrêmes; si maintenant nous pouvons déterminer h de manière à rendre égaux entre eux les coefficients de z et de z^3, l'équation précédente sera réciproque.

Posons donc

$$\frac{p'}{s'^{\frac{1}{4}}} = \frac{r'}{s'^{\frac{3}{4}}},$$

d'où nous tirons, en multipliant les deux membres par $s'^{\frac{3}{4}}$ puis les élevant au carré,

$$s' p'^2 = r'^2,$$

ou, en remplaçant les trois coefficients par leurs valeurs,

$$\left\{\begin{aligned} p' &= 4h + p, \\ r' &= 4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r, \\ s' &= h^4 + ph^3 + qh^2 + rh + s, \end{aligned}\right.$$

$$(h^4 + ph^3 + qh^2 + rh + s)(4h + p)^2 = (4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r)^2.$$

Et nous obtiendrons enfin, en développant et ordonnant par rapport à h,

$$\begin{aligned} h^3(p^3 + 8r - 4pq) + h^2(p^2q + 2pr + 16s - 4q^2) \\ + h(p^2r + 8ps - 4qr) + p^2s - r^2 = 0, \end{aligned}$$

équation du troisième degré qui nous donnera toujours au moins une valeur réelle pour h.

La question proposée peut alors être considérée comme résolue.

QUESTIONS.

778. Si l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de celle-ci :

$$aF(x) + bF'(x) + cF''(x) + \ldots = 0,$$

les constantes a, b, c,... étant telles, que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

n'ait pas de racines imaginaires. (HERMITE.)

779. Supposant toujours que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

ait toutes ses racines réelles, je fais

$$\frac{1}{a + bz + cz^2 + \ldots} = A + Bz + Cz^2 + \ldots;$$

cela admis, je dis que si l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires, il en est de même de

$$AF(x) + BF'(x) + CF''(x) + \ldots = 0.$$

(HERMITE.)

780. Soient m un nombre pair, et l'équation

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x + A_m = 0,$$

où A_0, A_1, A_2, ..., A_m sont des nombres positifs.

Soient H le plus grand des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

et h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_6}{A_5}, \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}};$$

l'équation proposée aura toutes ses racines comprises

entre H et h si l'on a $H > h$, et toutes ses racines imaginaires si l'on a $H = h$ ou $< h$. (P.)

781. Les mêmes choses étant posées, si m est un nombre impair, l'équation n'aura aucune racine au-dessus de H, et ne pourra avoir qu'une seule racine au-dessous de h.

Si $H = h$ ou $< h$, l'équation n'aura qu'une racine réelle. (P.)

782. Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira aussi une ligne droite.

783. Lorsqu'une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière que trois de ses lignes passent par des points fixes, toute autre ligne de la figure passera aussi par un point fixe.

784. Si l'on ôte à un quadrilatère complet successivement chacun de ses côtés, les cercles circonscrits aux quatre triangles qu'on obtient ainsi passeront par un même point, et les triangles qui ont pour sommet ce point, et pour bases les deux côtés opposés du quadrilatère, seront semblables.

785. Mener à deux cercles donnés deux tangentes qui fassent un angle donné, et de façon que la ligne qui joint les points de contact passe par un point donné.

786. Placer sur trois circonférences données un triangle donné semblable à celui qu'on obtient en joignant deux à deux les trois centres.

Les cinq questions précédentes nous ont été communiquées par M. Julius Petersen, de Copenhague.

787. Déterminer le lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe sous des angles donnés, α, β, γ, trois sphères données A, B, C.

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 433);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

XI. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont deux contacts du second ordre avec une même courbe.*

53. Nous désignons ce système par $[2(C_{m,n})^2]$.

Les théorèmes du n° 52 sont encore vrais ici où la courbe C_{m_1,n_1} coïncide avec la courbe $C_{m,n}$; mais au système $[2(C_{m,n})^2]$ appartiennent encore d'autres coniques singulières que celles qui sont nommées dans ce numéro.

Aux coniques infiniment aplaties nous devrons ajouter :

1° Celles qui sont renfermées dans une tangente d'inflexion et dont les deux sommets coïncident au point d'inflexion;

2° Celles qui sont renfermées dans une tangente de rebroussement et dont les deux sommets coïncident au point de rebroussement.

Comme les sommets de ces coniques infiniment aplaties coïncident, elles sont en même temps des coniques à points doubles. Sous ce point de vue, la seconde classe correspond, selon le principe de dualité, à la première considérée comme partie de λ, et réciproquement. Désignons par x le coefficient de la première classe dans l'expression de λ et de la seconde classe dans celle de ϖ, et par y le coefficient de la seconde classe dans λ et de la

première dans ϖ; nous aurons

$$\lambda = 9.t + 3.d'(n-3) + 1.\frac{d'(d'-1)}{2} + x.t' + y.d',$$

$$\varpi = 9.d + 3.t'(m-3) + 1.\frac{t'(t'-1)}{2} + x.d' + y.t';$$

d'où

$$\mu = 6t + 3d + \frac{1}{6}t'[6m + t' - (19 - 2y - 4x)]$$
$$+ \frac{1}{3}d'[6n + d' - (19 - 2y - x)],$$

$$\nu = 3t + 6d + \frac{1}{3}t'[6m + t' - (19 - 2y - x)]$$
$$+ \frac{1}{6}d'[6n + d' - (19 - 2y - 4x)].$$

54. Pour déterminer les coefficients x et y, on applique le lemme 31 au système $[(M)^2, M, l]$ de coniques qui ont avec la courbe M (de l'ordre m et douée d'un point multiple de l'ordre $m-1$) un contact du second et un contact du premier ordre, et qui touchent une droite l (*). Si l'on veut trouver par le lemme le nombre des coniques du système dont un point d'intersection avec M coïncide avec le point de contact du premier ordre, on doit attribuer à r, q, α et β les valeurs suivantes :

$$r = 1, \quad q = 2m - 5,$$
$$\alpha = N(M^2, M\theta, l), \quad \beta = N[(M)^2 - p - M, l],$$

ou [formule (II) du n° 48],

$$\beta = N[(M)^2, M, p, l] - 2N[(M)^2, M\theta, l] - 3N[(M)^2\theta, M, l].$$

(*) En remplaçant le système $[(M)^2, M, l]$ par le système $[(M)^2, M, p]$, on ne trouverait que l'équation $2x + y = 5$, qui admet deux solutions entières et positives.

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m - 7)\,N[(M)^2, M\theta, l] + N[(M)^2, M, p, l] - 3N(M^2\theta, M, l).$$

Or, d'après les formules (16), (13) et (18),

$$N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, l] = 3(n-2) + d',$$
$$N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p, l] = 2(3n + d')(m + n - 12) + 24(m+n),$$
$$N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, l] = m + 2n - 6.$$

En remplaçant ici la courbe $C_{m,n}$ par la courbe M on doit (n° 30) substituer $n = 2(m-1)$, $d' = 0$. Donc

$$q\alpha + \beta = 48m^2 - 213m + 234 = (m-2)(48m - 117).$$

Le nombre $q\alpha + \beta$ comprend :

1° $2N[2(M)^2, l]$, c'est-à-dire le double du nombre des coniques qui ont deux contacts du second ordre avec M et qui touchent l; car chacun des deux contacts du second ordre avec M peut résulter de la coïncidence d'un point d'intersection avec un point de contact du premier ordre;

2° $z.2t$, où z est un coefficient inconnu et t le nombre des tangentes doubles de M, car une conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente double de M et limitée à l'un des points de contact et à la droite l, appartient au système $[(M)^2, M, l]$: son point de contact du premier ordre coïncide avec deux points (*) d'intersection, et le nombre de ces coniques singulières est $2t$;

3° $u.t'$, où u est un coefficient inconnu, et t' le nombre des tangentes d'inflexion de M, car une conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de M, limitée au point d'inflexion et à la droite l, appartient au système $[(M)^2, M, l]$, et dans le point d'in-

(*) On se tromperait si l'on en concluait que z est divisible par 2.

flexion coïncident les points de contact du premier et du second ordre et un point d'intersection avec M.

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = 2\mathrm{N}[2(\mathrm{M})^2, l] + 2zt + ut'.$$

Or, selon le n° 30,

$$t = 2(m-2)(m-3), \quad t' = 3(m-2),$$

et $\mathrm{N}[2(\mathrm{M})^2, l]$ se trouve par la substitution, dans l'expression trouvée pour ν au n° 53, de ces valeurs de t et de t', et des valeurs suivantes :

$$n = 2(m-1), \quad d = \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \quad d' = 0.$$

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = (m-2)\{(36+4z)m - [92 + 12z - 2(2y+x) - 3u]\}.$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ devant être identiques, on aura

$$48 = 36 + 4z,$$
$$117 = 92 + 12z - 2(2y + x) - 3u.$$

55. On tire de ces équations

$$z = 3,$$
$$11 = 2(2y + x) + 3u.$$

x, y et u devant être entiers et positifs (*), cette équation donne seulement

$$u = 1, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

(*) Si l'un des nombres x ou y était nul, l'autre le serait également; car alors les coniques singulières dont le nombre est multiplié par x dans l'expression de λ, et par y dans celle de ϖ (ou réciproquement), n'appartiendraient pas au système. Or, l'équation trouvée prouve que ces coefficients ne peuvent être nuls tous les deux.

En substituant les valeurs de x et y dans les expressions calculées au n° 53, on trouve

$$(20\,a)\ (^*)\quad \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}(3n+d')^2 - 3(3n+d') - 9t' - 8d', \\ \nu = \frac{1}{2}(3n+d')^2 - 3(3n+d') - 8t' - 9d', \end{cases}$$

$$(20\,b)\qquad [2(C_{m,n})^2] \equiv (\mu, \nu).$$

On trouve, pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(20\,c)\quad \begin{cases} \mu = \frac{9}{2}m(m-2)(m^2-7), \\ \nu = \frac{3}{2}m(m-2)(3m^2-19). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on aura $\mu = \nu = 0$;
Pour $m = 3$, on aura $\mu = 27$, $\nu = 36$ (**).

56. Si, dans certains cas particuliers, les formules (20) ne sont pas immédiatement applicables (*voir* le n° 22), on pourra mettre à profit la connaissance acquise des valeurs des coefficients x et y. On a les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques qui ont deux contacts du second ordre avec une courbe donnée, on doit compter:

Deux fois *dans le nombre* λ *et* une fois *dans* ϖ, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de la courbe et limitée par deux points qui coïncident au point d'inflexion;*

(*) Les formules (20 a) donnent la relation suivante :

$$\mu - \nu = d' - t' = 3(m-n).$$

(**) Une conique ayant deux contacts du second ordre avec une courbe du troisième ordre, la corde de contact passe par un des neufs points d'inflexion. Par conséquent, le système $[(C_{3,6})^2]$ se divise en neuf systèmes partiels dont les caractéristiques sont $\mu = 3$ et $\nu = 4$.

Une fois *dans le nombre* λ *et* deux fois *dans le nombre* ϖ, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de la courbe, et composée de deux droites qui coïncident* avec *la tangente de rebroussement.*

XII. — *Détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du troisième ordre et un contact du premier ordre avec des courbes données.*

57. Le système $[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}]$ contient toute conique infiniment aplatie :

1° Renfermée dans une tangente à $C_{m,n}$ en l'un de ses points d'intersection avec C_{m_1,n_1} et limitée par des points qui coïncident avec ce point ;

2° Renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée par deux points qui coïncident au point de contact avec $C_{m,n}$;

3° Renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée au point d'inflexion, et à $C_{m,n}$;

4° Renfermée dans une tangente de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitée au point de rebroussement et à $C_{m,n}$.

On aura donc

$$\lambda = x.mm_1 + y.nn_1 + z.t'm_1 + u.d'm_1,$$

et, par le principe de dualité,

$$\varpi = x.nn_1 + y.mm_1 + z.d'n_1 + u.t'n_1.$$

Par conséquent

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1, \quad \nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1,$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}\left[(x+2y)\,n + zd' + ut'\right],$$

$$\mu'' = \frac{1}{3}\left[(2x+y)\,m + 2zt' + 2ud'\right],$$

$$\nu' = \frac{1}{3}\left[(2x+y)\,n + 2ut' + 2zd'\right],$$

$$\nu'' = \frac{1}{3}\left[(x+2y)\,m + zt' + ud'\right].$$

Or,

$$\mu'' = \mathrm{N}\left[(\mathrm{C}_{m,n})^3, p, l\right] = \nu',$$

d'où

$$(2x+y)(m-n) = 2(z-u)(d'-t'),$$

et comme

$$3(m-n) = d' - t'$$

(d'après la formule IV de la première note du n° 11),

$$2x + y = 6(z-u).$$

58. Pour trouver d'autres moyens propres à déterminer les coefficients, appliquons le lemme du n° 31 au système $[(\mathrm{M})^2, p_1, p_2]$. Dans ce cas

$$r = 2, \quad q = 2m - 3,$$
$$\alpha = \mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2\,\theta_1.p_1, p_2\right],$$
$$\beta = \mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2 - p, p_1, p_2\right].$$

ou [d'après l'équation (II) du n° 43]

$$\beta = \mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2, p, p_1, p_2\right] - 3\,\mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2\,\theta, p_1, p_2\right].$$

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m-6)\,\mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2\,\theta, p_1, p_2\right] + \mathrm{N}\left[(\mathrm{M})^2, p, p_1, p_2\right].$$

Or, selon les formules (17) et (11),

$$\mathrm{N}\left[(\mathrm{C}_{m,n})^2\,\theta,\ p_1, p_2\right) = 1,$$
$$\mathrm{N}\left[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p, p_1, p_2\right) = 3n + d',$$

où il faut substituer pour la courbe M (n° 30)

$$n = 2(m-1), \quad d' = 0.$$

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = 8m - 12.$$

Comme aucune conique du système dont un point de contact coïncide avec un point d'intersection n'est infiniment aplatie, on aura aussi (n° 31)

$$q\alpha + \beta = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^3, p_1, p_2],$$

dont on aura une expression en substituant dans la valeur de μ trouvée au n° 57,

$$n = 2(m-1), \quad d' = 0, \quad t' = 3(m-2);$$

ce qui donne

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}[(2x+4y+3u)m - (2x+4y+6u)].$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ devant être identiques, on trouve

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} 2\alpha + 4y + 3u = 24, \\ 2\alpha + 4y + 6u = 36. \end{cases}$$

59. Les équations (I) du n° 57 et (II) du n° 58 suffisent à déterminer les trois coefficients, car on sait qu'ils doivent être entiers et positifs (*). On trouve

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 5, \quad u = 4.$$

En introduisant ces valeurs dans les expressions trouvées au n° 57, on aura, pour résoudre le problème actuel, les

(*) Quant aux signes des coefficients, il suffit de supposer que x, u et z ne sont pas négatifs et que y est positif. Or, y étant nul, x le serait aussi d'après la signification de ces coefficients (n° 57 et première note du n° 55), ce que nos équations ne permettent pas.

formules suivantes :

$$(21\,a)\ (^*)\quad \begin{cases} \mu' = 6n - 4m + 3d' = 5m - 3n + 3t', \\ \mu'' = \nu' = 2(5n - 4m + 3d') = 2(5m - 4n + 3t'), \\ \nu'' = 6m - 4n + 3t' = 5n - 3m + 3d'. \end{cases}$$

$$(2\,b)\quad \begin{cases} [(C_{m,n})^3,\ C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\ \nu'' m_1 + \nu' n_1), \\ [(C_{m,n})^3,\ p] \equiv (\mu',\ \nu'), \\ [(C_{m,n})^3,\ l] \equiv (\mu'',\ \nu''). \end{cases}$$

On trouve, pour une courbe générale de l'ordre m :

$$(21\,c)\quad \begin{cases} \mu' = 2m(3m - 5), \\ \mu'' = \nu' = 2m(5m - 9), \\ \nu'' = m(5m - 8). \end{cases}$$

Pour $m = 2$ on trouve $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 4$ (**).
Pour $m = 3$ on trouve $\mu' = 24$, $\mu'' = \nu' = 36$, $\nu'' = 21$.

60. Des valeurs de x, y, z, u on déduit les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques qui ont un contact du troisième ordre et un contact du premier ordre respectivement avec deux courbes données $C_{m,n}$ *et* C_{m_1,n_1}, *on doit compter :*

Deux fois *dans le nombre* λ *et* deux fois *dans le nombre* ϖ, *toute conique ayant un point double à un point d'intersection des deux courbes et composée de deux droites qui coïncident dans la tangente à* $C_{m,n}$ *au même point ;*

Deux fois *dans* λ *et* deux fois *dans* ϖ, *toute conique*

(*) On voit que

$$2\mu' - \nu' = 2n,$$
$$2\nu'' - \mu'' = 2m.$$

(**) *Voir* Chasles, *Traité des Sections coniques*, n° 514.

infiniment aplatie, renfermée dans une tangente commune aux deux courbes, et limitée par deux points qui coïncident au point de contact avec $C_{m,n}$;

Il faut encore compter dans le nombre λ :

Cinq fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$, *et limitée au point d'inflexion et à la courbe* C_{m_1,n_1} ;

Quatre fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente de rebroussement de* $C_{m,n}$, *et limitée au point de rebroussement et* à C_{m_1,n_1} ;

Et dans le nombre ϖ :

Cinq fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente de rebroussement et d'une tangente à* C_{m_1,n_1} ;

Quatre fois, *toute conique ayant un point double en un point d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente d'inflexion et d'une tangente à* C_{m_1,n_1}

61. Les théorèmes du n° 60 sont encore vrais lorsque la courbe C_{m_1,n_1} coïncide avec la courbe $C_{m,n}$. Ils sont donc utiles à la détermination des caractéristiques du système $[(C_{m,n})^3, C_{m,n}]$ dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ deux contacts respectivement du troisième et du premier ordre. Le système ne contient pas d'autres coniques singulières que celles qui sont mentionnées dans ces théorèmes (*). On trouve donc

$$\lambda = 2.2d + 2.2t + 5.t'(m-3) + 4.d'(m-3),$$
$$\varpi = 2.2t + 2.2d + 5.d'(n-3) + 4.t'(n-3),$$

(*) On pourrait croire que les deux espèces de coniques singulières qui sont nommées dans le n° 56, appartiennent également à ce système-ci ; mais en les discutant avec soin, on trouve qu'elles ne sont d'aucune façon des limites de coniques qui satisfont à ses conditions. Du reste, on pourrait les introduire dans les nombres λ et ϖ, avec des coefficients qui seraient entiers et positifs ou nuls. On trouverait par les méthodes ordinaires qu'ils ont la valeur zéro.

d'où

$$(22a)\quad \begin{cases} \mu = 2(-4m^2 + 3mn + 3n^2 + 28m - 32n) \\ \qquad + 3(2m + n - 13)d', \\ \nu = -3m^2 - 3mn + 10n^2 + 53m - 61n \\ \qquad + 3(m + 2n - 13)d', \end{cases}$$

$$(22b)\qquad [(C_{m,n})^3,\ C_{m,n}] \equiv (\mu, \nu),$$

et, pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(22c)\quad \begin{cases} \mu = 6m(m-2)(m^2 + m - 10), \\ \nu = m(m-2)(10m^2 - 3m - 57). \end{cases}$$

62. Si les deux courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} se touchent, on fera usage de la formule suivante :

$$\text{(I)}\quad N[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}, Z],$$

où $(C_{m,n})^3\theta$ signifie la condition d'un contact du troisième ordre en un point donné, et $(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}$ celles de deux contacts séparés respectivement du troisième et du premier ordre avec deux courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} qui se touchent elles-mêmes.

On aura en particulier

$$\text{(II)}\quad N[(C_{m,n})^3, p, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - p, Z],$$

où $(C_{m,n}) - p$ signifie les conditions d'un contact du troisième ordre avec $C_{m,n}$ et d'une intersection avec la même courbe en un point donné, et

$$\text{(III)}\quad N[(C_{m,n})^3, l, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - l, Z].$$

D'après la formule (I) le système $[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}]$ se divise, dans le cas où $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} se touchent à un point θ en $[(C_{m,n})^3\theta]$ et $[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}]$, et chacune des caractéristiques du grand système comprend quatre fois la caractéristique homologue du premier système partiel et

une fois celle du second système partiel. Or, on trouve sans difficulté

$$[(C_{m,n})^3\,\theta) \equiv (1,1).$$

Les caractéristiques du système $[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}]$ sont faciles à trouver.

(*La fin prochainement.*)

NOTE SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. E.-C. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

La question que l'on désigne en Mécanique sous le titre de *mouvements relatifs* se réduit au problème suivant :

Étant donnés la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système mobile, et le mouvement de ce système par rapport à un système fixe, trouver la vitesse et l'accélération du point relativement au système fixe.

Ou, en renversant le problème :

Étant données la vitesse et l'accélération d'un point relativement à un système fixe, trouver la vitesse et l'accélération de ce point relativement à un système mobile dont on connaît le mouvement par rapport au système fixe.

Appelons vitesse et accélération absolues la vitesse et l'accélération du point par rapport au système fixe;

Vitesse et accélération relatives, la vitesse et l'accélération par rapport au système mobile.

Enfin, vitesse d'entraînement et accélération d'entraînement, la vitesse et l'accélération dont le point se trouverait animé à un instant donné, si à cet instant il devenait fixe par rapport au système mobile.

Dans le cas d'un simple mouvement de translation, l'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement.

Dans le cas d'un mouvement de rotation, l'accélération absolue n'est pas la résultante de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement; mais il faut joindre à ces deux composantes une troisième composante qu'on nomme *accélération centripète composée*.

Il est important de rechercher l'origine de cette troisième composante et de faire voir comment elle est la conséquence de ce principe fondamental de Mécanique : *Les accélérations se composent entre elles exactement de la même manière que les vitesses*.

Cette question a été traitée d'une manière explicite par Coriolis dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique* (XXIVe cahier). Il a tiré des formules générales de la Mécanique analytique un théorème remarquable sur la force centrifuge composée.

Depuis le Mémoire de Coriolis, son théorème a été démontré géométriquement de plusieurs manières ; mais ces démonstrations paraissent encore assez difficiles pour qu'on évite de les exposer dans l'enseignement tout à fait élémentaire; on les renvoie à une partie plus avancée de la Mécanique. Cette marche a l'inconvénient grave de jeter une certaine obscurité sur le principe de la composition des accélérations. Les élèves peuvent être induits à penser que ce principe n'est pas absolument vrai, et qu'il ne s'applique au mouvement de rotation qu'avec certaines réserves.

Dans la Note qui suit, on a essayé de présenter la com-

position des accélérations d'une manière assez élémentaire pour qu'on puisse l'exposer complétement au commencement même de la Mécanique et que, par suite, on puisse aborder immédiatement la question du mouvement apparent des corps à la surface de la terre, en tenant compte de la rotation.

Accélération dans le mouvement rectiligne.

Quand un point se meut en ligne droite et que sa vitesse varie en fonction du temps, la rapidité plus ou moins grande avec laquelle cette vitesse augmente ou diminue se nomme *accélération*. On peut donc dire que, dans le mouvement rectiligne, l'accélération n'est autre chose que la vitesse de la vitesse.

La vitesse V d'un point A peut être représentée en grandeur et en direction au moyen d'une droite AV. La

Fig. 1.

A V V'

vitesse V étant variable, la longueur de la droite AV varie, et la vitesse V', avec laquelle l'extrémité de la droite AV s'éloigne ou se rapproche du point A, est justement l'accélération. Cette vitesse V' peut être représentée elle-même au moyen d'une droite VV'. Le sens dans lequel la droite VV' est portée indique si l'accélération est positive ou négative, c'est-à-dire si la vitesse est croissante ou décroissante.

Composition des accélérations quand la vitesse est décomposée suivant des directions fixes.

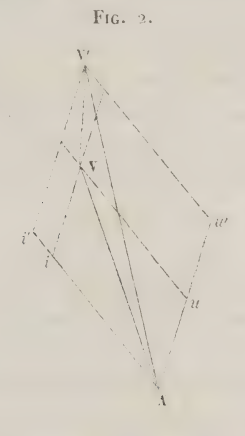
Lorsqu'un point A est animé de deux vitesses u et i, suivant des directions fixes Au et Ai, la vitesse résultante V est représentée en grandeur et en direction par

la diagonale AV du parallélogramme construit sur les deux vitesses composantes Au et Ai.

Si les deux composantes reçoivent des accroissements uu' et ii', la nouvelle résultante V′ est représentée par la diagonale AV′ du parallélogramme construit sur Au+uu' et Ai+ii'.

Le déplacement VV′ de l'extrémité de la diagonale est

Fig. 2.



représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les accroissements uu' et ii'.

Si, au lieu de recevoir des accroissements brusques, les vitesses composantes u et i varient d'une manière continue sans changer de direction, les droites uu', ii' représentent les accélérations composantes, c'est-à-dire les vitesses avec lesquelles les extrémités des côtés Au et Ai s'éloignent ou se rapprochent du point A.

La diagonale VV′ représente l'accélération résultante. C'est la vitesse avec laquelle se meut par rapport au point A l'extrémité de la droite AV qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point A.

Pour faire bien comprendre cette manière de représenter l'accélération, imaginons par le point mobile un

système géométrique mobile avec ce point, mais n'ayant qu'un simple mouvement de translation; par exemple, trois axes rectangulaires passant toujours par le point A, et restant constamment parallèles à eux-mêmes.

Tant que la droite AV, qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point A, reste fixe et invariable par rapport au système mobile, le mouvement du point est rectiligne et uniforme; mais aussitôt que le mouvement du point cesse d'être uniforme et rectiligne, la droite AV varie en grandeur et en direction, et la vitesse avec laquelle l'extrémité de cette droite se meut par rapport au système mobile représente en grandeur et en direction l'accélération du point.

On en conclut immédiatement ce principe fondamental :

Les accélérations se composent et se décomposent entre elles exactement de la même manière que les vitesses.

Si les accélérations composantes u' et i' sont entre elles dans le même rapport que les vitesses u et i, l'accélération résultante VV' est dirigée dans le même sens que la vitesse V, et cette dernière ne fait que changer de grandeur sans changer de direction. Mais si les accélérations composantes ne sont pas proportionnelles aux vitesses composantes, l'accélération résultante n'est pas dirigée dans le sens de la vitesse résultante, et cette dernière varie à la fois en grandeur et en direction; dans ce cas, le point A décrit une ligne courbe.

La composition des accélérations u' et i' est tout à fait indépendante de la valeur des vitesses u et i. Elle reste encore la même lorsque l'une de ces vitesses est nulle.

Ainsi, quand le point mobile décrit une ligne courbe, la composante de la vitesse suivant la normale est nulle; mais l'accélération suivant cette normale, ou plus exac-

tement, l'accélération suivant la direction fixe avec laquelle la normale vient coïncider à l'instant que l'on considère, n'est pas nulle, et, pour avoir l'accélération totale, il faut composer l'accélération suivant la direction normale avec l'accélération tangentielle.

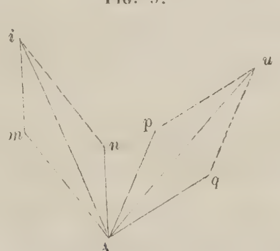
Composition des accélérations quand la vitesse est décomposée suivant des directions variables.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la vitesse décomposée suivant des droites ayant des directions fixes; mais on peut concevoir la vitesse décomposée suivant des droites dont les directions varient d'une manière continue.

En effet, supposons la vitesse décomposée suivant quatre directions fixes Am, An, Ap, Aq; soient m, n, p, q les quatre composantes.

Pour obtenir la résultante V, nous pouvons commencer par prendre la résultante i des deux vitesses m et n,

Fig. 3.



puis la résultante u des deux vitesses p et q. La vitesse V est alors décomposée suivant les deux composantes u et i. Or, si les vitesses m et n ne restent pas constamment dans le même rapport entre elles, leur résultante i varie en grandeur et en direction. De même, la résultante u des vitesses p et q peut varier en grandeur et en direc-

tion ; nous pouvons donc concevoir la vitesse V décomposée suivant des droites Ai et Au dont les directions varient d'une manière continue.

Dans ce cas, on commettrait une erreur grave en représentant l'accélération du point A par la résultante des vitesses avec lesquelles les extrémités des composantes i et u s'éloignent ou se rapprochent du point A. Il faut prendre la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des composantes; or, ces vitesses ne sont généralement pas dirigées suivant les composantes elles-mêmes.

En effet, les composantes m, n, p, q ayant des directions fixes, l'accélération du point A est la résultante des vitesses avec lesquelles les extrémités de ces composantes s'éloignent ou se rapprochent du point A.

Si nous commençons par prendre la résultante des deux accélérations composantes dirigées suivant Am et An, cette résultante sera la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la diagonale Ai, et cette vitesse ne sera généralement pas dirigée suivant Ai. De même, la résultante des deux accélérations dirigées suivant Ap et Aq sera la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la diagonale Au.

En prenant la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des diagonales Ai et Au, nous aurons l'accélération totale, c'est-à-dire la résultante de toutes les accélérations dirigées suivant les droites fixes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quand la vitesse d'un point est décomposée suivant des axes ayant des directions fixes ou variables, l'accélération de ce point est toujours représentée, en grandeur et en direction, par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des droites qui re-

présentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.

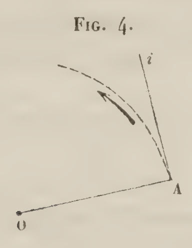
Accélération centripète.

Une droite d'une longueur constante

$$OA = r$$

tourne dans un plan autour d'un point fixe O avec une

Fig. 4.



vitesse angulaire constante ω. La vitesse du point A est représentée par une droite

$$Ai = r.\omega$$

dirigée perpendiculairement au rayon OA dans le sens du mouvement. L'accélération du point A est représentée par la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la droite Ai, par rapport à un système géométrique passant par le point A, et animé d'un simple mouvement de translation.

Or, puisque la droite Ai est toujours perpendiculaire au rayon OA, et que ce dernier tourne avec la vitesse angulaire ω, il est clair que la droite Ai tourne autour du point A avec la même vitesse angulaire ω par rapport au système géométrique; donc l'extrémité de Ai est animée par rapport à ce système d'une vitesse parallèle à AO, dirigée du point A vers le point O, et égale à

$$Ai.\omega = r.\omega^2.$$

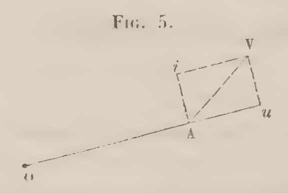
L'accélération du point A est donc dirigée vers le centre et égale au produit du rayon par le carré de la vitesse angulaire. C'est l'accélération centripète.

Accélération centripète composée.

Supposons que tandis que la droite OA tourne autour du point fixe O avec la vitesse angulaire constante ω, le rayon $OA = r$ ne reste pas invariable, mais que le point A glisse sur la droite mobile avec une vitesse constante u.

La vitesse V est la résultante de deux vitesses, l'une,

Fig. 5.



$Au = u$, dirigée suivant le rayon ; l'autre, $Ai = r.\omega$, dirigée perpendiculairement au rayon dans le sens du mouvement.

L'accélération du point A est représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des deux composantes Au et Ai.

Cherchons d'abord la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la composante Ai.

En vertu de la rotation, l'extrémité de Ai est animée d'une vitesse parallèle à AO, égale à

$$Ai.\omega = r.\omega^2.$$

Puisque r varie, $Ai = r.\omega$ varie en même temps. La vitesse avec laquelle r varie étant égale à u, la vitesse avec laquelle l'extrémité de Ai s'éloigne du point A est $u.\omega$.

L'extrémité de la composante Ai est donc animée de

deux vitesses : l'une $r\omega^2$ perpendiculaire à la composante Ai, l'autre $u\omega$ perpendiculaire à la composante Au.

Maintenant, cherchons la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la composante Au.

La vitesse u étant constante, la distance Au reste invariable. Mais, en vertu de la vitesse angulaire ω, l'extrémité de Au est animée d'une vitesse $u.\omega$ perpendiculaire à Au.

L'accélération du point A est donc la résultante de deux accélérations composantes, la première,

$$r.\omega^2,$$

dirigée dans le sens du rayon OA; la seconde,

$$2.u.\omega,$$

perpendiculaire à la vitesse u du point A relativement à la droite mobile.

Cette composante $2u.\omega$ se retrouve constamment dans tous les problèmes de mouvements relatifs, quand le système mobile est animé d'un mouvement de rotation. Dans tous les cas, son origine est la même que dans le cas simple que nous venons d'examiner. Elle est toujours perpendiculaire à la vitesse relative u et dirigée dans le sens indiqué par la vitesse angulaire ω.

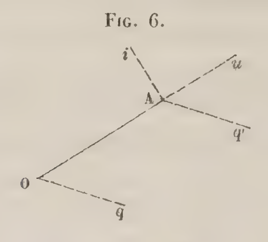
Bien que l'accélération $2u.\omega$ ne soit pas dirigée vers le centre, on la nomme *accélération centripète composée.* Cela vient de l'analogie de forme qu'elle présente avec l'accélération centripète.

En effet, l'accélération centripète, A$i.\omega$, est toujours perpendiculaire à la composante Ai, et égale au produit de cette composante par la vitesse angulaire ω.

L'accélération centripète composée, $2u.\omega$, est toujours perpendiculaire à la composante Au, et égale au double produit de cette composante par la vitesse angulaire ω.

Il peut arriver que le point O, autour duquel tourne la droite OA, ne reste pas immobile, mais soit animé

Fig. 6.



d'un mouvement quelconque; dans ce cas, pour avoir l'accélération du point A, il suffit de joindre l'accélération du point O aux accélérations trouvées précédemment.

Soit Oq la droite qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point O.

La vitesse du point A sera la résultante de trois vitesses: 1° Aq' égale et parallèle à Oq; 2° $Au = u$; et, enfin, $Ai = r.\omega$.

L'accélération du point A sera représentée par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités de ces trois composantes.

Or, la composante Aq' restant toujours égale et parallèle à la vitesse Oq du point O, l'extrémité de la droite Aq' possède exactement la même vitesse que l'extrémité de la droite Oq; donc il suffit de joindre l'accélération du point O aux autres accélérations trouvées précédemment.

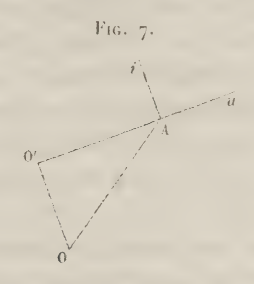
Le centre de rotation, au lieu d'être situé sur la droite mobile, peut être pris hors de cette droite en un point quelconque du plan dans lequel elle se meut.

Ainsi le point A se meut en ligne droite avec une vitesse constante u, tandis que le plan déterminé par la direction de la vitesse u et par un point quelconque O

tourne autour de ce point O avec la vitesse angulaire ω.

Du point O, abaissons sur la direction de la vitesse u la perpendiculaire OO′.

Fig. 7.



La droite O′A tourne autour du point O′ avec la vitesse angulaire ω, tandis que le point O′ décrit la circonférence dont OO′ est le rayon. Comme le rayon OO′ tourne autour du point O avec la vitesse angulaire ω, on voit que le point O′ est animé d'une accélération centripète égale à $OO'.\omega^2$.

Donc le point A est animé :

1° D'une accélération centripète composée $2.u.\omega$ perpendiculaire à Au;

2° D'une accélération centripète dirigée suivant AO′ et égale à $AO'.\omega^2$;

3° D'une accélération parallèle à OO′ et égale à $O'O.\omega^2$.

Les deux composantes $AO'.\omega^2$ et $O'O.\omega^2$ ont une résultante dirigée suivant AO et égale à $AO.\omega^2$.

Par conséquent, les deux composantes de l'accélération du point A sont l'accélération centripète composée $2u.\omega$ et l'accélération centripète $AO.\omega^2$.

On démontrerait comme précédemment que si le point O est animé d'un mouvement quelconque, il faut joindre l'accélération de ce point aux autres composantes de l'accélération du point A.

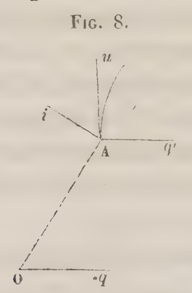
Enfin, au lieu d'avoir un simple mouvement rectiligne

et uniforme, le point A peut avoir un mouvement quelconque dans le plan mobile.

Dans ce cas, l'extrémité de la composante Au, qui représente la vitesse du point A relativement au plan mobile, est animée de deux vitesses : 1° celle due à la rotation qui est perpendiculaire à la composante Au et égale à $u.\omega$; 2° celle qui représente l'accélération du point A relativement au plan mobile. Il faut donc joindre cette dernière accélération aux autres composantes de l'accélération du point A.

En résumé, si un point A se meut d'une manière quelconque dans un plan mobile, tandis que ce plan

Fig. 8.



tourne autour d'un de ses points, O, avec la vitesse angulaire ω, et que le point O se meut d'une manière quelconque avec la vitesse Oq;

La vitesse absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse Au du point A par rapport au plan mobile;

Deuxièmement, la vitesse d'entraînement : cette vitesse est elle-même la résultante 1° d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse Oq du point O, 2° d'une vitesse Ai perpendiculaire au rayon OA et égale à OA.ω.

L'accélération absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, l'accélération relative, c'est-à-dire l'accélération du point A par rapport au plan mobile;

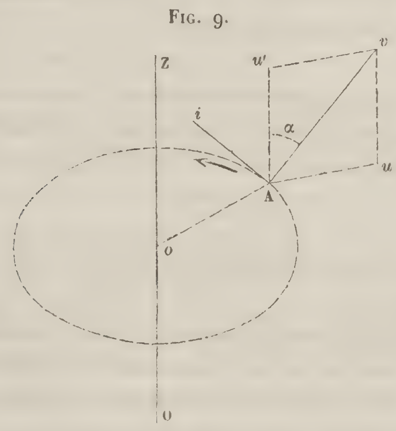
Deuxièmement, l'accélération d'entraînement : cette accélération est elle-même la résultante de deux composantes : 1° une composante égale et parallèle à l'accélération du point O, 2° l'accélération centripète du point A, dirigée suivant AO et égale à $AO.\omega^2$;

Troisièmement, l'accélération centripète composée : cette accélération est égale au double produit $2u.\omega$ de la vitesse relative u par la vitesse angulaire ω; elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse relative u, et dans le sens du mouvement de rotation de la composante Au.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à considérer le mouvement dans un plan; il est facile d'étendre les démonstrations au mouvement dans l'espace.

Supposons que le point A se meuve en ligne droite, suivant une direction quelconque $A\nu$ et avec une vitesse constante ν, par rapport à un système mobile tournant autour de l'axe fixe OZ, avec la vitesse angulaire constante ω.

Fig. 9.



Du point A, abaissons sur l'axe OZ la perpendiculaire $AO = r$.

En vertu de la rotation, le point A est animé d'une vitesse

$$Ai = r.\omega$$

perpendiculaire à la fois à l'axe OZ et au rayon OA.

La vitesse absolue du point A est la résultante des deux vitesses $A\nu$ et Ai.

L'accélération absolue du point A est représentée par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des deux composantes $A\nu$ et Ai.

Décomposons la vitesse ν suivant deux composantes, l'une Au', parallèle à l'axe OZ, l'autre Au, perpendiculaire à cet axe.

La composante Au', étant parallèle à l'axe de rotation, reste fixe et invariable par rapport au système mené par le point A ; donc la vitesse de l'extrémité de Au' est nulle.

Il ne reste donc que les vitesses des extrémités des deux composantes Au et Ai. Nous avons vu que ces deux vitesses donnent :

1° L'accélération centripète,

$$r.\omega^2,$$

dirigée suivant le rayon ;

2° L'accélération centripète composée,

$$2.u.\omega,$$

perpendiculaire à la composante Au et située dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation OZ.

En appelant α l'angle que la direction de la vitesse relative ν fait avec l'axe OZ, nous aurons

$$u = \nu.\sin\alpha.$$

Donc, l'accélération centripète composée est égale à

$$2.\omega.\nu.\sin\alpha\,;$$

elle est perpendiculaire à la fois à la vitesse relative et à l'axe de rotation ; enfin, elle est dirigée dans le sens déterminé par la rotation de la composante $A\nu$.

On démontrerait, comme on l'a fait pour le mouvement dans un plan, que, si le point A se meut d'une manière quelconque par rapport au système mobile, il suffit de joindre aux composantes précédentes l'accélération du point relativement au système mobile.

Si l'axe OZ se meut en restant constamment parallèle à lui-même, tous les points de cet axe ayant à chaque instant des accélérations égales et parallèles, il suffit de joindre l'accélération d'un des points de l'axe de rotation.

En résumé, si un point A se meut d'une manière quelconque par rapport à un système mobile, tandis que ce système tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe qui se meut en restant constamment parallèle à lui-même,

La vitesse absolue du point A est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement;

L'accélération absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, l'accélération relative;

Deuxièmement, l'accélération d'entraînement;

Troisièmement, l'accélération centripète composée

$$2.\omega.\nu.\sin\alpha,$$

perpendiculaire à l'axe de rotation et à la vitesse relative,

Dirigée dans le sens de la rotation de la droite Au qui représente la composante de la vitesse relative estimée perpendiculairement à l'axe de rotation.

Il ne reste plus à examiner que le cas où le système mobile tourne autour d'un point; mais, pour cela, il faut commencer par rappeler les lois du mouvement de

rotation et la composition des vitesses angulaires. Le cas où l'axe de rotation reste constamment parallèle à lui-même suffit pour se rendre compte du mouvement apparent des corps à la surface de la terre.

Accélération centrifuge composée.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé l'accélération absolue en supposant l'accélération relative connue. Il est facile d'en déduire la solution du problème inverse, c'est-à-dire de déterminer l'accélération relative au moyen de l'accélération absolue.

Nous avons vu que lorsque le système mobile tourne autour d'un axe fixe, l'accélération absolue est la résultante :

1° De l'accélération relative ;
2° De l'accélération centripète ;
3° De l'accélération centripète composée.

Par conséquent, l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération centripète prise en signe contraire, et enfin de l'accélération centripète composée prise en signe contraire. Or, l'accélération centripète prise en signe contraire n'est autre chose que l'accélération centrifuge ; de même, l'accélération centripète composée prise en signe contraire est l'accélération centrifuge composée. Nous pouvons donc conclure que l'accélération relative est la résultante :

1° De l'accélération absolue ;
2° De l'accélération centrifuge ;
3° De l'accélération centrifuge composée.

NOTE

sur l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres ;

Par M. A. HERMANN,
Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au lycée de Tournon.

On sait que lorsqu'on passe d'un polygone au suivant, la différence entre le rayon et l'apothème du second est moindre que le quart de cette différence pour le premier.

Cette remarque conduit facilement à une limite de l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres.

Désignons par r_k et a_k le rayon et l'apothème du polygone dont le nombre des côtés est 2^k ; r_2 et a_2 seront le rayon et l'apothème du carré, de sorte que $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $a_2 = \frac{1}{2}$.

Pour obtenir π à l'approximation $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{2}{a_k} - \frac{2}{r_k} < \frac{1}{10^m},$$

ou

$$(1) \qquad r_k - a_k < \frac{a_k \cdot r_k}{2 \cdot 10^m}.$$

Or, r_k et a_k étant, tous deux, plus grands que l'apothème $\frac{1}{2}$ du carré, l'inégalité précédente sera vérifiée dès qu'on aura

$$(2) \qquad r_k - a_k < \frac{1}{8 \cdot 10^m}.$$

Mais on a, d'après le théorème rappelé,

$$r_3 - a_3 < \frac{1}{4}(r_2 - a_2),$$
$$r_4 - a_4 < \frac{1}{4^2}(r_2 - a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$r_k - a_k < \frac{1}{4^{k-2}}(r_2 - a_2).$$

Il suffira donc, pour que l'inégalité (2) existe, qu'on ait

$$\frac{1}{4^{k-2}}(r_2 - a_2) < \frac{1}{8.10^m},$$

ou, en remplaçant r_2 et a_2 par leurs valeurs $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4^{k-2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{8.10^m},$$

ce qui donne

(3) $$4^{k-3} > 10^m(\sqrt{2} - 1);$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$(k-3).\log 4 > m + \log(\sqrt{2} - 1),$$
$$k > 3 + \frac{m}{\log 4} + \frac{\log(\sqrt{2} - 1)}{\log 4}.$$

L'inégalité précédente est vérifiée, *à fortiori*, lorsqu'on donne à k la valeur $3 + 2m$, ou une valeur plus grande (*). Et il est facile d'en conclure que si l'on quadruple le nombre des côtés d'un polygone, on obtient une décimale de plus dans la valeur approchée du nombre π.

(*) Quand le nombre entier m est plus grand que l'unité, il suffit de prendre k égal à $2 + 2m$ pour que l'inégalité $4^{k-3} > 10^m(\sqrt{2} - 1)$ ait lieu. Et si m est égal à 7, ou plus grand que 7, on satisfait à cette inégalité en posant $k = 2m$. G.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 590

(voir 1re série, tome XX, page 141);

Par M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée royal d'Arlon (Belgique).

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante.

On peut considérer cette proposition comme une conséquence immédiate de la question 591 (*) appliquée aux coniques, et d'une autre proposition qui trouverait sa place naturelle dans les propriétés très-intéressantes des coniques, énoncées par M. Faure dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, p. 55, 56 et 216.

En effet, soit

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux. Désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets d'un triangle circonscrit ABC; par (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) celles des milieux A′, B′, C′

(*) La question 591 a été résolue dans l'année 1865. La démonstration que nous en donnons plus loin est analogue à celle de M. Painvin, t. XIX, p. 293 et 297.

des côtés BC, CA, AB; et par (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3) celles des sommets du triangle A″B″C″ conjugué avec A′B′C′. Représentons aussi par S, T, T′ les surfaces de ces trois triangles, et posons

$$\varphi_{m,n} = \frac{X_m X'_n}{a^2} + \frac{Y_m Y'_n}{b^2} - 1.$$

On peut écrire

$$-\frac{4TT'}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} \frac{X_1}{a} & \frac{Y_1}{b} & 1 \\ \frac{X_2}{a} & \frac{Y_2}{b} & 1 \\ \frac{X_3}{a} & \frac{Y_3}{b} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{X'_1}{a} & \frac{Y'_1}{b} & -1 \\ \frac{X'_2}{a} & \frac{Y'_2}{b} & -1 \\ \frac{X'_3}{a} & \frac{Y'_3}{b} & -1 \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant la multiplication par lignes,

$$(1) \qquad -\frac{4TT'}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \\ \varphi_{3,1} & \varphi_{3,2} & \varphi_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Mais les triangles T, T′ étant polaires réciproques, on a $\varphi_{m,n} = 0$ pour $m \gtrless n$, et des valeurs de $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{3,1}$ on tire, par l'élimination de $\frac{X'_1}{a^2}$, $\frac{Y'_1}{b^2}$,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -1-\varphi_{1,1} \\ X_2 & Y_2 & -1 \\ X_3 & Y_3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

En appelant T_1, T_2, T_3 les moitiés des déterminants

$$\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire les surfaces des triangles OB′C′, OC′A′,

OA′B′ (O est le centre de l'ellipse), la dernière équation donne

$$\varphi_{1,1}T_1 + T = 0; \quad \text{d'où} \quad \varphi_{1,1} = -\frac{T}{T_1}.$$

On trouve semblablement

$$\varphi_{2,2} = -\frac{T}{T_2} \quad \text{et} \quad \varphi_{3,3} = -\frac{T}{T_3}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), il viendra

$$-\frac{4TT'}{a^2b^2} = \varphi_{1,1}\varphi_{2,2}\varphi_{3,3} = -\frac{T^3}{T_1T_2T_3}$$

ou

$$(2) \qquad a^2b^2 = \frac{4T_1T_2T_3}{T^2}T',$$

ce qui est la question 591 appliquée aux coniques.

On peut aussi écrire

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 1 & 0 \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 0 & 1 \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 0 & 1 \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Effectuons par lignes la multiplication des deux déterminants et, dans le produit, retranchons des trois dernières lignes et colonnes les premières ligne et colonne multipliées respectivement par $\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}\right)$. En posant

$$\frac{(x_2-x_3)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_3)^2}{b^2} = l_1^2\ldots,$$

il viendra

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}l_3^2 & -\frac{1}{2}l_2^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}l_3^2 & 0 & -\frac{1}{2}l_1^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}l_2^2 & -\frac{1}{2}l_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

et en développant,

$$(3)\qquad \frac{16S^2}{a^2b^2}=-\sum l_1^4+2\sum l_1^2l_2^2.$$

Mais les équations qui expriment que les droites BC, CA, AB sont tangentes à l'ellipse peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{(x_2-x_3)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_3)^2}{b^2}-\frac{(x_2y_3-x_3y_2)^2}{a^2b^2}=0,$$

ou

$$l_1=\frac{2S_1}{ab},\quad l_2=\frac{2S_2}{ab},\quad l_3=\frac{2S_3}{ab},$$

en appelant S_1, S_2, S_3 les moitiés des déterminants

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

ou les surfaces des triangles OBC, OCA, OAB.

La relation (3) revient par conséquent à

$$a^2b^2=\frac{1}{S^2}(S_1+S_2+S_3)(-S_1+S_2+S_3)(S_1-S_2+S_3)(S_1+S_2-S_3).$$

On constate facilement que

$$S_1+S_2+S_3=S,\quad -S_1+S_2+S_3=4T_1,$$

$$S_1 - S_2 + S_3 = 4T_2, \quad S_1 + S_2 - S_3 = 4T_3 \ (^*),$$

d'où

$$(4) \qquad a^2 b^2 = \frac{64 T_1 T_2 T_3}{S}.$$

En comparant les relations (2) et (4), on trouve

$$T' = S,$$

ce qui démontre le théorème 590 pour les ellipses inscrites.

On le conclut immédiatement pour les hyperboles tangentes aux trois côtés du triangle, puisqu'il suffit de remplacer dans les équations précédentes b par $b\sqrt{-1}$.

Représentons par d_1, d_2, d_3 les côtés du triangle ABC, ou les doubles des côtés du triangle $A'B'C'$; par R le rayon du cercle circonscrit, et par δ_1, δ_2, δ_3 les distances du centre de la conique aux droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Nous pourrons remplacer dans la formule (4) T_1, T_2, T_3 par $\frac{1}{4}d_1\delta_1$, $\frac{1}{4}d_2\delta_2$, $\frac{1}{4}d_3\delta_3$, et $\frac{d_1 d_2 d_3}{S}$ par $4R$, ce qui donnera

$$a^2 b^2 = 4R\delta_1\delta_2\delta_3,$$

d'où le théorème suivant :

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, le produit des carrés de ses demi-axes principaux est égal

---

(*) On a, par exemple,

$$2(-S_1 + S_2 + S_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

et, en ajoutant la première ligne aux deux autres, il vient

$$2(-S_1 + S_2 + S_3) = -\begin{vmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ x_1 + x_3 & y_1 + y_3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} X_3 & Y_3 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \ldots$$

au produit des distances de son centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, multiplié par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Considérons maintenant une parabole inscrite au triangle ABC et représentée par $\varphi(x, y) = y^2 - 2px = 0$. En adoptant les notations précédentes, sauf à poser $\varphi_{m,n} = Y_m Y'_n - p(X_m + X'_n)$, nous aurons

$$-4p^2 TT' = \begin{vmatrix} Y_1 & X_1 & -p \\ Y_2 & X_2 & -p \\ Y_3 & X_3 & -p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y'_1 & -p & X'_1 \\ Y'_2 & -p & X'_2 \\ Y'_3 & -p & X'_3 \end{vmatrix},$$

et en effectuant le produit par les lignes

$$(5) \qquad -4p^2 TT' = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \\ \varphi_{3,1} & \varphi_{3,2} & \varphi_{2,3} \end{vmatrix}.$$

On a encore $\varphi_{m,n} = 0$ pour $m \gtrless n$; et en éliminant Y'_1, pX'_1 entre les valeurs de $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{3,1}$, il vient

$$\begin{vmatrix} Y_1 & pX_1 + \varphi_{1,1} & 1 \\ Y_2 & pX_2 & 1 \\ Y_3 & pX_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$2pT - \varphi_{1,1}(Y_2 - Y_3) = 0.$$

On trouve semblablement

$$2pT - \varphi_{2,2}(Y_3 - Y_1) = 0, \qquad 2pT - \varphi_{3,3}(Y_1 - Y_2) = 0.$$

L'équation (5) peut donc s'écrire

$$-4p^2 TT' = \varphi_{1,1}\,\varphi_{2,2}\,\varphi_{3,3} = \frac{8p^3 T^3}{(Y_1 - Y_2)(Y_2 - Y_3)(Y_3 - Y_1)}$$

ou

$$(6) \qquad 2p = \frac{(Y_1 - Y_2)(Y_2 - Y_3)(Y_1 - Y_3)}{T^2} T'.$$

On peut remarquer que le numérateur de la dernière fraction égale le produit des projections des côtés du triangle $A'B'C'$ sur la directrice de la parabole.

Il est évident que dans la formule (6) on peut remplacer les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ respectivement par ABC et par le triangle qui a ses sommets aux points de contact des tangentes BC, CA, AB; comme ce dernier vaut le double de ABC, on aura

$$(7)\qquad 2p = \frac{2(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S}.$$

Des relations (6) et (7) on conclut encore

$$T' = S.$$

On voit aisément que la proposition (590) s'applique aussi aux paraboles circonscrites, ou conjuguées au triangle ABC. Car, dans le premier cas, on a

$$4pS = \begin{vmatrix} y_1 & 2px_1 & 1 \\ y_2 & 2px_2 & 1 \\ y_3 & 2px_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1^2 & 1 \\ y_2 & y_2^2 & 1 \\ y_3 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant, en vertu du théorème dit *de Vandermonde*, est égal au produit

$$(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2);$$

d'où

$$(8)\qquad 2p = \frac{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}{2S};$$

et cette relation, comparée à l'équation (6), donne

$$T' = T = \frac{S}{4}.$$

En supposant la parabole conjuguée au triangle ABC, on peut faire coïncider dans la formule (6) les triangles

T et T′ avec S, ce qui donnera

$$(9) \qquad 2p = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S},$$

et les relations (9) et (6) combinées conduisent à l'équation

$$T' = 2T = \frac{S}{2} \ (^*).$$

Les formules (7), (8) et (9) sont ordinairement mises sous la forme

$$p = 4R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$

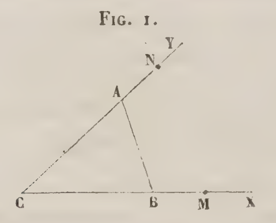
$$p = R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$

$$p = 2R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$

θ, θ', θ'' étant les angles que fait l'axe focal de la parabole avec les côtés du triangle.

Note du Rédacteur. — Pour déterminer une conique inscrite dans un triangle ABC, on peut donner arbitrairement deux des points M, N aux-

FIG. 1.



quels la courbe doit toucher deux des côtés CB, CA. Lorsque le produit $AN \times BM$ est moindre que $CA \times CB$, la conique inscrite est une ellipse; et suivant qu'on a

$$AN \times BM = CA \times CB \quad \text{ou} \quad AN \times BM > CA \times CB,$$

cette conique est une parabole ou une hyperbole.

(*) Ce résultat aurait aussi pu s'obtenir en remarquant que le triangle A′B′C′, qui a ses sommets aux milieux des côtés d'un triangle conjugué à la parabole, est circonscrit à la courbe (voir *Nouvelles Annales*, année 1865, p. 310), et que son conjugué A″B″C″ en vaut le double.

Car, en prenant pour axes de coordonnées les côtés CB, CA et désignant par a, b, m, n les droites CB, CA, CM, CN, l'équation de la conique inscrite est

$$(1)\qquad (my + nx - mn)^2 - 4mn\,\frac{(m-a)(n-b)}{ab}\,xy = 0.$$

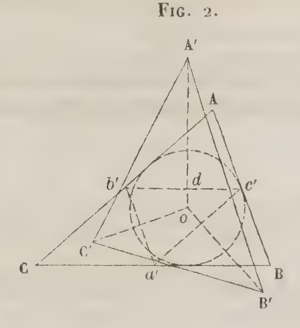
Il est évident que la surface du triangle déterminé par les polaires des milieux des côtés CA, CB, AB, relativement à cette courbe, est une fonction des paramètres de l'équation (1) et de l'angle des axes. Or, si cette fonction conserve constamment la même valeur, quelles que soient les valeurs de m et de n satisfaisant à l'inégalité

$$(m-a)(n-b) < ab,$$

il faut en conclure qu'elle est indépendante de m et de n : c'est dire que si la proposition 590 existe pour toutes les ellipses inscrites, elle a de même lieu pour les paraboles et les hyperboles.

Mais, quelle que soit l'ellipse inscrite, on peut la projeter suivant un cercle; donc, tout se réduit à faire voir que : *Si l'on prend les polaires des milieux* a', b', c' *des côtés d'un triangle* ABC *par rapport à un cercle tan-*

FIG. 2.



gent aux trois côtés, ces polaires déterminent un triangle A'B'C' *équivalent au triangle donné* ABC.

Cette proposition résulte d'un calcul bien simple. En effet, soient s et $2p$ la surface et le périmètre du triangle ABC ; h la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC ; o et r le centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

Puisque le point A' est le pôle de $b'c'$ par rapport au cercle, la droite oA' est perpendiculaire sur $b'c'$ en un point d tel qu'on a

$$od \times o\mathrm{A}' = r^2.$$

De plus,

$$od = \frac{h}{2} - r = r\left(\frac{h}{2r} - 1\right) = r\left(\frac{p}{a} - 1\right) = \frac{r(p-a)}{a};$$

donc

$$oA' = \frac{ar}{p-a},$$

et de même :

$$oB' = \frac{br}{p-b}, \quad oC' = \frac{cr}{p-c}.$$

D'autre part, les angles $A'oB'$, ACB étant supplémentaires, les surfaces des triangles $A'oB'$, ACB sont entre elles dans le rapport des produits $oA' \times oB'$ et ab; d'où

$$A'oB' = s \times \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{s(p-c)}{p}.$$

Pareillement

$$A'oC' = \frac{s(p-b)}{p} \quad \text{et} \quad B'oC' = \frac{s(p-a)}{p}.$$

Il s'ensuit

$$A'oB' + A'oC' + B'oC' = \frac{s(3p-a-b-c)}{p} = s.$$

Par conséquent,

$$A'B'C' = ABC.$$

On démontre, d'une manière semblable, que le triangle déterminé par les polaires des points a', b', c', relatives à l'un quelconque des trois cercles ex-inscrits au triangle donné ABC, est équivalent à ce dernier triangle. G.

Question 775, 776, 777;

PAR M. JOSEPH GRAINDORGE,
Élève ingénieur des Mines à Liége.

775. *L'équation*

$$(1) \qquad F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (SYLVESTER.)

Pour résoudre cette question, ainsi que les deux suivantes, nous rappellerons la propriété connue, que deux racines consécutives d'une équation comprennent un nombre impair de racines de l'équation dérivée première.

L'équation (1), dont tous les termes sont positifs, n'admet aucune racine positive. On peut l'écrire sous cette forme :

$$F(x) = F'(x) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

d'où

$$(2)\qquad F'(x) = -\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Si n est un nombre pair, $F'(x)$ est négatif pour toute valeur réelle de x autre que *zéro*; et si n est impair, $F'(x)$ est positif pour toute valeur négative de x. Donc, d'après le principe rappelé, l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir deux racines réelles.

776. *L'équation*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x) = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}x^n = 0 \end{aligned}\right.$$

ne peut avoir deux racines réelles quand γ *est* > 0, *ou* $< -n$. (SYLVESTER.)

On trouve facilement que l'équation proposée peut s'écrire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{\gamma}(1-x)F'(x) \\ + \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\gamma}{n}+1\right)x^n = 0. \end{aligned}\right.$$

Premier cas. $\gamma > 0$.

L'équation (3) ne peut avoir que des racines négatives, puisque tous ses termes sont positifs.

Soient α et β deux racines consécutives de cette équa-

tion; si n est un nombre pair, en substituant successivement α et 6 à x dans l'équation (4), les facteurs $1-\alpha$, $1-6$ seront tous les deux positifs, ainsi que α^n et 6^n. Il en résultera que $F'(\alpha)$ et $F'(6)$ seront négatifs. Donc, α et 6 ne peuvent être racines de l'équation $F(x)=0$.

Si n est impair, α^n et 6^n seront négatifs, et $F'(\alpha)$, $F'(6)$ positifs. Par conséquent, si α est la racine que l'équation admet (puisqu'elle est de degré impair), 6 ne pourra être racine de cette équation.

Deuxième cas. $\gamma < -n$.

En remplaçant, dans l'équation (4), γ par $-\gamma'$, il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) = &-\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) \\ &+\frac{(1-\gamma')(2-\gamma')\ldots(n-1-\gamma')}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(1-\frac{\gamma'}{n}\right)x^n, \end{aligned}\right.$$

où γ' sera $> n$.

L'équation proposée devenant

$$\begin{aligned} F(x) = 1 - \gamma' x + \frac{\gamma'(\gamma'-1)}{1.2}x^2 - \ldots \\ \pm\frac{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots n}x^n = 0 \end{aligned}$$

ne pourra avoir que des racines positives, puisque ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

1° Si n est un nombre pair, il vient

$$\begin{aligned} F(x) = &-\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) \\ &+\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\gamma'}{n}-1\right)x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) = \frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\gamma'}{n}-1\right)x^n.$$

Comme γ' est plus grand que n, le second membre de cette dernière équation est positif pour toute valeur réelle de x. Ainsi, le signe de $F'(x)$ est le même que celui de $(1-x)$. Il s'ensuit que, si α et 6 sont deux racines consécutives de l'équation $F(x)=0$, l'une d'elles doit être moindre que l'unité, et l'autre plus grande. Ce qui revient à dire que l'équation $F(x)=0$ doit avoir une racine comprise entre 0 et 1, et une seule. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, car en remplaçant x par 0 et 1 dans $F(x)$, les résultats de ces substitutions sont positifs. En effet,

$$F(0) = 1,$$

et

$$F(1) = 1 - \gamma' + \ldots + \frac{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$= \frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n)}{1.2\ldots n},$$

parce que n est pair.

On voit donc que l'équation $F(x)=0$ ne peut avoir deux racines réelles, et par conséquent toutes ses racines sont imaginaires.

2° Si n est impair, il vient

$$F(x) = -\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x)$$
$$-\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{\gamma'}{n}-1\right]x^n = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) = -\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{\gamma'}{n}-1\right]x^n.$$

Dans ce cas, $F'(x)$ a un signe contraire à celui de $(1-x)$; donc, si α et 6 sont deux racines consécutives de $F(x)=0$, il faut encore que l'une d'elles soit plus petite et l'autre plus grande que l'unité. Mais, l'équation étant de degré impair, si elle a deux racines réelles α, 6, elle en admet nécessairement une troisième; donc deux racines consécutives seraient plus petites que l'unité, ou plus grandes que l'unité, ce qui est impossible, comme on vient de le voir. D'où il faut conclure que l'équation n'admet qu'une seule racine réelle.

777. *Si l'équation $f(x)=0$, du degré m, n'a que des racines imaginaires, l'équation*

$$f(x)+af'(x)+a^2f''(x)+\ldots+a^mf_m(x)=0$$

n'aura, elle aussi, que des racines imaginaires.

(HERMITE.)

L'équation

$$F(x)=f(x)+af'(x)+\ldots+a^mf_m(x)=0$$

est de degré pair, comme $f(x)=0$. Donc, si elle a une racine réelle, elle en aura au moins deux que nous pouvons considérer comme consécutives.

Or, on a

$$F(x)=f(x)+a.F'(x);$$

et si α, 6 sont les deux racines consécutives de $F(x)=0$, il faut que $F'(\alpha)$ et $F'(6)$ aient des signes contraires.

Mais l'égalité

$$F(x)=f(x)+a.F'(x)$$

donne

$$0=f(\alpha)+a.F'(\alpha),$$
$$0=f(6)+a.F'(6);$$

l'équation $f(x)=0$ n'ayant pas de racine réelle, $f(\alpha)$ et $f(6)$ ont le même signe; il en est donc de même de $F'(\alpha)$

et $F'(6)$, ce qui prouve que α et 6 ne peuvent être racines de $F(x) = 0$; et, par conséquent, cette équation n'a que des racines imaginaires.

Note. — Même solution des questions 775, 776, 777 par M. Laisant, et de la question 775 par M. Laduron, élève à l'École des Mines de Liége.

CORRESPONDANCE.

1. Nous recevons de M. le comte Léopold Hugo, neveu du célèbre poëte, la lettre suivante que nous insérons intégralement.

« Monsieur le Rédacteur,

» Permettez-moi de résumer ici, en quelques lignes, un travail que j'ai fait paraître sous une forme provisoire, et dont je prépare actuellement une édition typographique.

» Ce Mémoire a pour titre : *Théorie des Cristalloïdes*. Les cristalloïdes sont des solides géométriques formés par l'assemblage d'onglets à surface cylindrique variable, exactement comme les pyramides en général sont composées de pyramides à base triangulaire. Ces onglets ont pour section un triangle rectangle, et leur réunion donne des corps ronds (dits : *pluro-cylindriques*) ayant, dans les cas réguliers, l'apparence soit de dômes polygonaux, soit de trémies ; dans d'autres cas, le forme est celle de cornes à section également polygonale, correspondant aux pyramides obliques.

» La théorie précitée peut être envisagée, à mon sens, comme remplaçant, en l'élargissant, le chapitre des solides de révolution des cours d'Analyse ; ces derniers solides entrant dans l'ensemble comme cas particuliers.

» J'appelle *coefficient* l'expression qui, multipliant le produit de la hauteur, ou axe, par la base triangulaire de l'onglet, donne le volume de celui-ci. Malgré la variété et la nature des courbes servant de directrices aux surfaces cylindriques, souvent le coefficient se montre purement algébrique. C'est ce qui a lieu quand l'équation fournit une valeur de x^2, ne renfermant que des puissances entières ou fractionnaires de y, laquelle donnera une intégrale algébrique.

» Je m'attache à cette condition, comme se rapprochant des séries connues du prisme et de la pyramide.

» On trouve aussi des résultats offrant de grandes analogies avec les propriétés de la sphère. Certaines formes de l'équation directrice, de degré n, donnent pour coefficient $\frac{n}{n+1}$; ceci comprend la directrice elliptique, pour laquelle $n=2$, et le coefficient alors se réduit à $\frac{2}{3}$, comme dans le problème d'Archimède.

Les courbes $y^2 = ax^n$ sont très-remarquables comme directrices; elles donnent pour le coefficient de l'onglet pris sur un axe $\frac{1}{n+1}$ (*), et sur l'autre axe $\frac{n}{n+4}$. Pour $n=2$, on retrouve de part et d'autre le coefficient $\frac{1}{3}$ de la pyramide; pour la parabole, $n=1$, et on a des solides à coefficients respectifs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$. On voit que le premier de ces cristalloïdes trouve sa place, comme intermédiaire, entre les deux séries de la Géométrie élémentaire. J'ajoute ici que d'autres positions de l'onglet donnent une

(*) Si l'on rapproche ce coefficient de la fraction de quadrature des aires, la relation est $\frac{n+2}{2n+2}$. Les troncs ou segments donnent aussi des résultats curieux.

formule $\frac{(n+2)^2-4(n+1)}{(n+2)(n+1)}$, qui, pour la parabole, se réduit à $\frac{1}{6}$. Une dernière combinaison, pour la même courbe, donne $\frac{8}{15}$.

» Ces divers coefficients, multipliés par la base *quelconque* et par la hauteur, expriment le volume de tout assemblage (ou de toute différence) d'onglets de même formule. Les deux belles séries $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ pourront être obtenues par la méthode des limites, en partant du volume de la sphère. Je crois pouvoir énoncer, en finissant, que les cristalloïdes viennent, à juste titre, se placer à côté des corps étudiés par l'antiquité, dont ils complètent et pour ainsi dire expliquent le système.

» Veuillez agréer, Monsieur et cher Maître, l'expression de mes sentiments respectueux et dévoués,

» Cte LÉOPOLD HUGO. »

2. *Extrait d'une lettre de M. R. Alexandre.* — « La méthode pour résoudre les équations du troisième degré, que j'ai donnée dans le numéro d'août (p. 358), peut recevoir une simplification que je me contenterai d'indiquer en quelques mots.

» Remplacer simplement y par $\frac{1}{z}$, diviser par r' et multiplier par z^3 tous les termes de l'équation. Vu la relation (2), le premier membre contient les trois derniers termes du développement de $\left[z+\frac{q'}{3r'}\right]^3$. Cela permet d'obtenir la valeur de z, d'où l'on déduit celle de x, au moyen de la relation $x=\frac{1}{z}+h$. »

3. La solution de la question 766, par M. Rakowski, nous est parvenue trop tard pour qu'il ait été possible de la mentionner dans le numéro d'octobre.

QUESTIONS.

788. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 désignant les racines, prises dans un ordre quelconque, de l'équation

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on a

$$x_1^2(x_4x_5 + x_5x_2 + x_2x_3) + x_2^2(x_5x_1 + x_1x_4 + x_3x_4)$$
$$+ x_3^2(x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_5) + x_4^2(x_2x_3 + x_3x_5 + x_5x_1)$$
$$+ x_5^2(x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_2) = -2r.$$

(S. Realis.)

789. On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le sommet de cette parabole. Chaque point de la circonférence de ce cercle étant pris comme pôle, on trace la polaire correspondante. Déterminer l'enveloppe de toutes ces droites. (Laisant.)

790. Démontrer :

1° Que le mouvement de l'angle droit, donné par Newton, pour tracer la cissoïde, est produit par le roulement d'une parabole sur une autre parabole égale à la première.

2° Que les lignes décrites par les différents points du plan de la parabole mobile sont des courbes du troisième degré (sept espèces différentes d'après la classification de Newton); de là, pour toutes ces courbes, une génération mécanique semblable à celle de la cissoïde.

3° Que les roulettes ainsi obtenues ont une génération géométrique simple (par points); faire voir en outre comment on peut passer de cette génération géométrique à la génération mécanique (mouvement continu).

(E. Habich.)

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(suite et fin; voir page 492);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

XIII. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée.*

63. A ce système, dont la notation est $[(C_{m,n})^4]$, appartient toute conique infiniment aplatie :

1° renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par deux points qui coïncident au point d'inflexion;

2° renfermée dans une tangente de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitée par deux points qui coïncident au point de rebroussement.

On trouve donc

$$\lambda = x.t' + y.d',$$

où x et y sont des coefficients inconnus. Puis le principe de dualité donne

$$\varpi = x.d' + y.t'.$$

Les coniques irrégulières qui entrent dans le nombre ϖ sont les mêmes que celles qui entrent dans λ; mais les coefficients sont permutés. On voit donc que $x = 0$ amènerait $y = 0$, et réciproquement (*voir* la note première du n° 55). Du reste ils sont des nombres entiers et ne peuvent être négatifs.

On trouve maintenant

$$\mu = \frac{1}{3}(2x+y)t' + \frac{1}{3}(x+2y)d',$$

$$\nu = \frac{1}{3}(x+2y)t' + \frac{1}{3}(2x+y)d'.$$

64. Pour déterminer x et y nous appliquerons le lemme du n° 31 au système $[(M)^3, C_{m_1,n_1}]$ où nous remplacerons successivement la courbe C_{m_1,n_1} par un point ou par une droite. On aura (notations du n° 31)

$$r = 3, \quad q = 2m - 4,$$
$$\alpha = N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}),$$
$$\beta = N[(M)^3 - p, C_{m_1,n_1}],$$

ou, par la formule (II) du n° 62,

$$\beta = N[(M)^3, p, C_{m_1,n_1}] - 4N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}],$$

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m-8)N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}] + N[(M)^3, p, C_{m_1,n_1}].$$

Supposons d'abord que $C_{m,n}$ soit un point p_1 par lequel les coniques doivent passer.

Alors on sait [n° 62 et formules (21)] que

$$N[(C_{m,n})^3\theta, p_1] = 1,$$
$$N[(C_{m,n})^3, p, p_1] = 6n - 4m + 3d'.$$

Pour la courbe M on doit substituer $n = 2(m-1)$, $d' = 0$, et l'on trouve

$$q\alpha' + \beta' = 10(m-2),$$

où α' et β' représentent ce que deviennent α et β dans ce cas-ci. Or, pour aucune conique infiniment aplatie du système $[(M)^3, p_1]$ le point de contact ne coïncide avec

un point d'intersection. Par conséquent (n° 31)

$$q\alpha' + \beta' = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, p_1).$$

On trouve la valeur de $\mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, p_1]$ en substituant dans l'expression trouvée pour p (n° 63)

$$t' = 3(m-2), \quad d' = 0.$$

Par conséquent

$$q\alpha' + \beta' = (2x+y)(m-2).$$

Les deux expressions de $q\alpha' + \beta'$ devront être identiques, on a

$$2x + y = 10.$$

Soit ensuite C_{m_1,n_1} une droite l. Alors [n° 62, formules (21)]

$$\mathrm{N}[(C_{m,n})^3\theta, l) = 1$$
$$\mathrm{N}[(C_{m,n})^3, p, l) = 2(5n - 4m + 3d').$$

Pour la courbe M on doit substituer $n = 2(m-1)$, $d' = 0$. En désignant par α'' et β'' ce que deviennent dans ce cas particulier α et β, on trouve

$$q\alpha'' + \beta'' = 14(m-2).$$

$q\alpha'' + \beta''$ comprend :

1° Le nombre $\mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, l]$ des coniques qui ont un contact du quatrième d'ordre avec M et qui touchent l.

2° $z.t'$, ou le nombre des coniques infiniment aplaties renfermées dans les tangentes d'inflexion de M, limitées aux points d'inflexion, et à la droite l, multiplié par un coefficient z; car ces coniques singulières appartiennent au système, et, dans les points d'inflexion coïncident, outre les quatre points communs qui forment le contact du troisième ordre, encore deux points d'intersection, sans que le contact s'élève à un ordre supérieur.

On voit que le coefficient z qui est entier est égal ou supérieur à 2. Si M avait des points de rebroussement, on devrait encore avoir égard à d'autres coniques singulières. Maintenant on trouve

$$q\alpha'' + \beta'' = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, l) + z.t',$$

où $\mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, l)$ s'obtient par la substitution de

$$t' = 3(m-2), \quad d' = 0.$$

dans l'expression trouvée pour ν (n° 63), et où t' qui appartient à la courbe M est aussi égal à $3(m-2)$. Par conséquent

$$q\alpha'' + \beta'' = (x + 2y + 3z)(m-2).$$

Les deux expressions de $q\alpha'' + \beta''$ devant être identiques, on a

$$x + 2y + 3z = 14.$$

65. Les équations (I) et (II) du n° 64 n'admettent, à cause des limites posées dans les n°s 63 et 64, que la solution suivante :

$$z = 2, \quad x = 4, \quad y = 2.$$

On trouve en substituant ces valeurs,

$$\mu = \frac{2}{3}(5t' + 4d'), \quad \nu = \frac{2}{3}(4t' + 5d'),$$

ou si l'on préfère des expressions entières,

$$(23a)\ (^*) \left\{ \begin{array}{l} \mu = 2[5(n-m) + 3d'] = 2[4(m-n) + 3t'], \\ \nu = 2[4(n-m) + 3d'] = 2[5(m-n) + 3t'], \end{array} \right.$$

$$(23b) \qquad [(\mathrm{C}_{m,n})^4] \equiv (\mu, \nu).$$

(*) On voit que $\mu - \nu = 2(n - m)$.

Pour une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(23c)\qquad \begin{cases} \mu = 10m(m-2), \\ \nu = 8m(m-2). \end{cases}$$

66. Les valeurs $x = 4$, $y = 2$ donnent le théorème suivant :

Pour un système de coniques qui ont un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée, on doit compter :

Quatre fois *dans* λ *et* deux fois *dans* ϖ, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de la courbe, et limitée à deux points qui coïncident au point d'inflexion ;*

Deux fois *dans* λ *et* quatre fois *dans* ϖ, *toute conique ayant un point double* en *un point de rebroussement de la courbe et composée de deux droites qui coïncident* avec *la tangente de rebroussement* (*).

(*) La méthode dont nous avons fait usage ne servant qu'à déterminer des caractéristiques, elle n'est pas applicable si l'on veut trouver le nombre de coniques qui satisfont à cinq conditions dont aucune n'est indépendante des autres. Cette lacune a été remplie par M. Cayley, qui m'a fait l'honneur de me communiquer les résultats qui suivent ici avec la permission de leur auteur. Le savant distingué d'Angleterre désigne par (5), (4,1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) et (1, 1, 1, 1, 1) les nombres respectifs des coniques qui ont avec une courbe donnée un contact de l'ordre 5 ou deux contacts des ordres 4 et 1,..., ou enfin cinq contacts de l'ordre 1, et par α le nombre $3n + d'$ $(= 3m + t')$ qu'il introduit pour faire ses formules symétriques. Alors

$$(5) = -15m - 15n + 9\alpha,$$

$$(4,1) = -8m^2 - 20mn - 8n^2 + 104m + 104n + \alpha(6m + 6n - 66)$$

$$(3,2) = 120m + 120n + \alpha(-4m - 4n - 78) + 3\alpha^2,$$

$$\begin{aligned}(3,1,1) = {} & -\frac{3}{2}m^3 - 10m^2n - 10mn^2 - \frac{3}{2}n^3 + \frac{109}{2}m^2 + 116mn \\ & + \frac{109}{2}n^2 - 434m - 434n \\ & + \alpha\left(\frac{3}{2}m^2 + 6mn + \frac{3}{2}n^2 - \frac{69}{2}m - \frac{69}{2}n + 291\right) - 3\alpha^2,\end{aligned}$$

XIV. — *Applications.*

67. *Développée d'une courbe géométrique.* — Les formules données sont utiles pour déterminer les nombres

---

$$(2,2,1) = 24m^2 + 54mn + 24n^2 - 468m - 468n + \alpha(-8m - 8n + 327) + \alpha^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n - 12\right),$$

$$\begin{aligned}(2,1,1,1) = {} & 6m^3 + 30m^2n + 30mn^2 + 6n^3 - 174m^2 - 348mn - 174n^2 \\ & + 1320m + 1320n \\ & + \alpha\left(\frac{1}{6}m^3 + m^2n + mn^2 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{15}{2}m^2 - 26mn - \frac{15}{2}n^2 + \frac{358}{3}m + \frac{358}{3}n - 960\right) \\ & + \alpha^2\left(-\frac{3}{2}m - \frac{3}{2}n + 28\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,1,1,1,1) = {} & \frac{1}{120}m^5 + \frac{1}{12}m^4n + \frac{1}{3}m^3n^2 + \frac{1}{3}m^2n^3 + \frac{1}{12}mn^4 + \frac{1}{120}n^5 \\ & - \frac{1}{12}m^4 - \frac{5}{6}m^3n - 2m^2n^2 - \frac{5}{6}mn^3 - \frac{1}{12}n^4 \\ & - \frac{113}{24}m^3 - \frac{209}{12}m^2n - \frac{209}{12}mn^2 - \frac{113}{24}n^3 \\ & + \frac{1267}{12}m^2 + \frac{593}{3}mn + \frac{1267}{12}n^2 \\ & - \frac{3259}{5}m - \frac{3259}{5}n \\ & + \alpha\left(-\frac{1}{4}m^3 - \frac{3}{2}m^2n - \frac{3}{2}mn^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{29}{4}m^2 + 23mn + \frac{29}{4}n^2 - \frac{337}{4}m - \frac{337}{4}n + \frac{195}{2}\right) \\ & + \alpha^2\left(\frac{9}{8}m + \frac{9}{8}n - 15\right).\end{aligned}$$

Déjà, en 1864, M. Cayley a donné le nombre (5) pour le cas d'une courbe générale de l'ordre m (*Philosophical Transactions*, t. CLV, p. 545 ; 1865). Quant à l'introduction d'une seule notation pour $3n + d'$, je regrette de ne l'avoir pas employée dans mes formules, où elle permettrait de garder la symétrie en même temps que les expressions contiendraient toujours les mêmes trois nombres donnés, m, n et α.

m_1, n_1, d_1, d'_1, t_1, t'_1 correspondant à la développée d'une courbe donnée $C_{m,n}$. On y emploie les propriétés suivantes de la développée :

1° D'être l'enveloppe des normales de la courbe donnée ;

2° D'être le lieu des centres des cercles qui ont avec $C_{m,n}$ un contact du second ordre ;

3° De n'avoir pour tangentes d'inflexion que les normales aux points de rebroussement du second ordre de $C_{m,n}$. Excepté le cas très-singulier où $C_{m,n}$ est doué de ces points, on a tout de suite $t'_1 = 0$.

68. Le nombre des normales à $C_{m,n}$ qui passent par un point donné, est égal à celui des cercles dont le centre est en ce point et qui touchent $C_{m,n}$. Or la condition d'être un cercle à centre donné peut être remplacée par celle de toucher deux droites (imaginaires) en des points donnés. Donc

$$n_1 = \mathrm{N}(l_1 d_1,\ l_2 d_2,\ C_{m,n}),$$

ou, selon la formule (II) du n° 23 (aucune conique ne pouvant toucher et couper la même droite),

$$n_1 = \frac{1}{2}\mathrm{N}(l_1\theta_1,\ l_2,\, p_2,\, C_{m,n}) = \frac{1}{4}\mathrm{N}(l_1,\, p_1,\, l_2,\, p_2,\, C_{m,n}),$$

ou d'après la formule (3),

$$n_1 = m + n.$$

69. La développée étant le lieu des centres d'un système de cercles, ou le lieu des pôles de la droite à l'infini par rapport à un système de coniques qui passent par deux points de cette droite, son ordre m_1 s'exprime par $\frac{\nu}{2}$, où ν est la seconde caractéristique de ce système (1).

(*) Voir *Comptes rendus* du 15 février 1864, le théorème II.

Ce système est de la forme $[(C_{m,n})^2, p_1, p_2)$. Par conséquent, formules (11)],

$$m_1 = 3m + t' = 3n + d'.$$

70. Puis les formules de M. Plücker donnent :

$$(26)\quad d'_1 = 3(2m - n + t') = 3(2n - m + d'),$$

$$(27)\quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}(m+n)^2 - \frac{1}{2}(4m + n + t') \\ \quad = \frac{1}{2}(m+n)^2 - \frac{1}{2}(m + 4n + d'), \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2}(3m + t')^2 - 5(3m + t') + 4(m+n) \\ \quad = \frac{1}{2}(3n + d')^2 - 5(3n + d') + 4(m+n). \end{cases}$$

Un point de rebroussement de la développée est en général le *centre d'un cercle qui a avec* $C_{m,n}$ *un contact du troisième ordre.* Le nombre de ces cercles est

$$N[(C_{m,n})^3, p_1, p_2] = 5m - 3n + 3t' = d'_1 - m;$$

selon les formules (21). Les m autres points de rebroussement sont à l'infini et correspondent aux m points de $C_{m,n}$ à l'infini. La tangente à la développée en l'un de ces points est la droite à l'infini elle-même. Donc il y a aussi $\frac{m(m-1)}{2}$ tangentes doubles à l'infini. Il y en aura encore

$$t_1 - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{1}{2}(2mn + n^2 - 4n - d').$$

Celles-ci seront deux fois normales à $C_{m,n}$.

d_1 *est le nombre des points qui sont des centres de courbure correspondant à deux points de* $C_{m,n}$.

Du reste ces résultats sont bien connus, mais trouvés par d'autres considérations.

71. Nous y ajouterons quelques théorèmes qui appartiennent à la même théorie :

Le lieu des points d'où on peut mener deux normales égales à une courbe $C_{m,n}$, *est de l'ordre*

$$m(m+2n-5)+t;$$

car cet ordre sera la moitié de la caractéristique ν d'un système $(2C_{m,n}, p_1, p_2)$ ou, selon les formules (4), de $2m(m+2n-5)+2t$.

Il y a, dans le plan,

$$\frac{1}{3}(2m^3+6m^2n-n^3-30m^2-18mn+13n^2+84m-42n)$$
$$+\frac{1}{3}(6m+3n-26)t$$

points d'où l'on peut mener à une courbe $C_{m,n}$ *trois normales égales;* car ce nombre est celui que nous avons désigné par $N(3C_{m,n}, p_1, p_2)$, et qui a, selon les formules (6), la valeur que nous venons d'indiquer.

Il y a sur la développée de $C_{m,n}$

$$3(2mn+n^2+4m-10n)+(2m+n-14)d'$$

points d'où l'on peut mener à $C_{m,n}$ *une normale égale au rayon de courbure de* $C_{m,n}$ *qui y touche la développée;* car ce nombre est celui que nous avons désigné par $N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p_1, p_2]$ dans les formules (13).

72. *Courbe caustique par réflexion.* — Nous donnerons encore un exemple de l'application de la théorie des caractéristiques en discutant la courbe enveloppe des rayons émanés d'un point dans le plan d'une courbe $C_{m,n}$ et réfléchis par celle-ci. Nous désignerons par m_2, n_2, d_2, d'_2, t_2, t'_2 les nombres m, n, d, d', t, t' qui y correspondent et que nous aurons à chercher. A cette recherche les propositions suivantes seront utiles :

1° Une conique ayant pour foyer le point f d'où partent les rayons et tangente à $C_{m,n}$ au point θ, le rayon réfléchi par $C_{m,n}$ au point θ passera par l'autre foyer de la conique;

2° Un système de coniques ayant un foyer commun au point f d'où partent les rayons et un contact du second ordre avec $C_{m,n}$, la courbe cherchée sera le lieu de l'autre foyer;

3° Si le contact s'élève au troisième ordre, le second foyer sera un point de rebroussement de la courbe cherchée.

Il faut encore se rappeler que la condition d'avoir un point donné pour foyer équivaut à deux tangentes données.

73. Selon la première proposition du n° 72, la classe n_2 de la courbe cherchée s'exprime par le nombre des coniques qui ont pour foyers le point f et un point quelconque donné, et qui touchent $C_{m,n}$; par conséquent [*voir* les formules (3)]

$$n_2 = N(C_{m,n}, l_1, l_2, l_3, l_4) = m + 2n.$$

D'après la deuxième proposition du n° 72, la courbe cherchée est le lieu du foyer non donné d'un système dont on connaît l'autre foyer. Ce lieu est semblable à celui du centre : son ordre s'exprime donc par la caractéristique ν de ce système (*), qui sera de la forme $[(C_{m,n})^2, l_1, l_2]$. Par conséquent [*voir* les formules (11)]

$$m_2 = 3m + t' = 3n + d'.$$

Enfin, par la troisième proposition du n° 72,

$$d'_2 = N[(C_{m,n})^3, l_1, l_2],$$

(*) *Comptes rendus* du 15 février 1864, théorème I.

ou, selon les formules (21),

$$d'_2 = 6m - 4n + 3t' = 5n - 3m + 3d'.$$

74. Puis les formules de M. Plücker donnent

$$t'_2 = 2n,$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(3m + t')^2 - 11m + 5n - 5t'$$

$$= \frac{1}{2}(3n + d')^2 + 4m - 10n - 5d',$$

$$t_2 = \frac{1}{2}[(m + 2n)^2 - (m + 11n + d')]$$

$$= \frac{1}{2}[(m + 2n)^2 - (4m + 8n + t')].$$

En général, notre courbe caustique n'a pas d'inflexions réelles. Les $2n$ tangentes d'inflexion sont donc imaginaires, et l'on peut prouver qu'elles sont les tangentes menées à $C_{m,n}$ par les deux points à l'infini sur un cercle, et que les points d'inflexion sont aux points de contact avec $C_{m,n}$.

t_2 représente le nombre de chemins par lesquels un rayon deux fois réfléchi par $C_{m,n}$ peut retourner au point d'où il part, si l'on n'a pas égard au sens dans lequel il parcourt ce chemin. En y ayant égard on doit remplacer le nombre t_2 par $2t_2$.

Note.

Les méthodes que nous avons employées pour la recherche des caractéristiques des systèmes de coniques planes s'appliquent avec peu de modifications aux caractéristiques des systèmes de surfaces du second ordre assujetties à huit conditions (*). On y fait usage des théo-

(*) *Voir* sur ces systèmes les publications de MM. Chasles et de Jonquières, dans les *Comptes rendus* (t. LXI, p. 396, et t. LVIII, p. 567), et la dernière de M. Chasles du 26 février 1866.

rèmes suivants dont les deux premiers au moins sont connus (*Comptes rendus*, 4 sept. 1864), et dont le dernier se prouve sans difficulté.

Dans un système (μ, ν, ρ) *de surfaces du second ordre il y a :*

1° $2\rho - \nu$ *cônes ;*

2° $2\mu - \nu$ *coniques planes ;*

3° $2\nu - \mu - \rho$ *surfaces singulières composées de deux plans dont la ligne d'intersection est limitée à deux points* (sommets).

Un tableau contenant la déduction par ces moyens de la XVIII[e] classe de résultats publiés par M. Chasles dans les *Comptes rendus* du 26 février, est sous presse pour être inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Copenhague*, et il donne un exemple de l'application de ces théorèmes (*).

NOTE SUR LES FRACTIONS CONTINUES ;

Par M. Hermann LAURENT,
Docteur ès Sciences.

Introduction.

Si nous désignons par $\varphi(x)$ la valeur de la fraction

(*) La date de ce tableau montre que la méthode n'est pas accommodée à des résultats connus d'avance. Je l'avais envoyé à l'Académie des Sciences de Copenhague sous pli cacheté, pour attendre la publication promise par M. Chasles, par déférence pour ce géomètre et aussi parce que j'avais profité de sa publication du 4 septembre. Cette discrétion est devenue superflue par la publication de M. Chasles du 26 février, et le billet étant décacheté, la Société savante a bien voulu faire imprimer mon petit tableau.

continue périodique

$$(1)\qquad \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\ddots}}},$$

nous aurons, en supposant cette fraction convergente,

$$x : (1+\varphi) = \varphi$$

ou

$$(2)\qquad \varphi^2 + \varphi - x = 0,$$

d'où l'on tire, en ne prenant que la racine de cette équation qui s'évanouit avec x,

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}.$$

Nous avons défini la fonction φ par la fraction (1), mais comme cette fraction peut perdre sa convergence pour certaines valeurs de x, c'est désormais à l'aide de l'équation (3) que nous définirons la fonction φ. Ce sera, si l'on veut, la racine de l'équation (2) non développable par la série de Lagrange; si nous désignons par $-\psi(x)$ l'autre racine, la formule de Lagrange donnera

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} [\psi(x)]^k &= \left[\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right]^k \\ &= 1 + k\frac{x}{1} + k\frac{(k-3)}{1.2}x^2 + k\frac{(k-4)(k-5)}{1.2.3}x^3 \\ &\quad + k\frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3.4}x^4 \\ &\quad + k\frac{(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{1.2.3.4.5}x^5 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura entre les fonctions φ et ψ les relations

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi(x).\psi(x) = x, \\ \psi(x) = 1 + \varphi(x). \end{cases}$$

Les formules que nous venons d'établir nous seront très-utiles dans la suite, mais il faut en préciser le sens. A cet effet, il suffit de rappeler que le radical $\sqrt{1+4x}$ doit toujours être pris positivement lorsqu'il est réel, et en général il ne s'agira jamais que de la valeur de ce radical dont la partie réelle est positive.

Définition de la fonction u_n.

Ceci posé, formons les réduites de la fraction (1); si nous désignons par u_n le dénominateur de la $n+1$ réduite, nous aurons

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1, & \\ u_1 = 1 + x, & u_2 = 1 + 2x, \\ u_3 = 1 + 3x + x^2, & u_4 = 1 + 4x + 3x^2, \\ u_5 = 1 + 5x + 6x^2 + x^3, & u_6 = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La loi de formation est donnée, comme on sait, par la formule

$$(6)\qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\,x,$$

en sorte que les fonctions u_n sont liées entre elles par l'équation aux différences (6), ou, ce qui revient au même,

$$\Delta^2 u + \Delta u - ux = 0.$$

Expression générale de u_n.

D'après la formule (6), pour trouver le coefficient de x^i dans u_{n+1}, il faut ajouter au coefficient de x^i dans u_n le

coefficient de x^{i-1} dans u_{n-1}; les coefficients de x^0 sont alors égaux à 1 dans toutes les fonctions u; les coefficients de x^1 sont 0, 1, 2, 3, 4,...; ceux de x^2 sont d'abord 1, puis 1 augmenté du second nombre naturel, c'est-à-dire le second nombre figuré du second ordre, puis le second nombre figuré du second ordre augmenté du troisième nombre naturel, c'est-à-dire le troisième nombre figuré du second ordre, etc. On verrait de même que les coefficients de x^i sont les nombres figurés de l'ordre i. On a donc

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} u_n = 1 + nx &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^2 \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}x^3 \\ &+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

le développement devant être arrêté dès que l'on trouve un terme nul.

De l'équation $u_n = 0$.

L'équation $u_n = 0$ jouit de propriétés remarquables que nous allons d'abord étudier.

Si nous considérons la suite des fonctions u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_r$, l'équation (6) nous montre que deux fonctions consécutives ne peuvent s'annuler à la fois; en effet, si l'on avait $u_n = u_{n+1} = 0$, on en conclurait $u_{n-1} = 0$ et ainsi de suite jusqu'à $u_0 = 0$, ce qui est absurde, puisque u_0 est constant et égal à 1. On voit de plus qu'en supposant $x < 0$, si l'une des fonctions u_n passe par zéro, celle qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont de signes contraires; on peut donc appliquer aux fonctions u_n la règle de Sturm. Or pour $x = -\infty$ les signes de u_0,

$u_1, u_2, \ldots, u_r$ sont respectivement

$$+ - - + + - - + + - - \ldots;$$

pour x voisin de zéro, les signes des fonctions u sont $+$; de $-\infty$ à 0 la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r$ a donc perdu toutes ses variations. Or, si $r = 4i + 1$ ou $4i + 2$, la suite en question avait $2i + 1$ variations pour $x = -\infty$, son degré était $2i$; donc elle a $2i$, c'est-à-dire toutes ses racines réelles et négatives. Le cas où $r = 4i + 3$ et $4i$ se discute de la même façon. Ainsi on peut énoncer ce théorème remarquable :

L'équation $u_n = 0$, obtenue en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fraction (1), *a toutes ses racines réelles et négatives.*

Ajoutons à cela que la fonction u_{n-1} joue par rapport à u_n le même rôle que $\frac{d(\mathrm{F}x)}{dx}$ par rapport à $\mathrm{F}(x)$ dans le théorème de Rolle. Ainsi les racines des équations

$$u_{n-1} = 0, \quad u_n = 0$$

se séparent mutuellement.

Fonction plus générale que u_n.

Considérons actuellement la série indéfinie

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = 1 + nx + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^2 \\ + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} x^3 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle n est un nombre quelconque; les premiers termes de cette série représentent u_n lorsque n est positif et entier.

La série (8) est évidemment convergente pour toutes

les valeurs du module de x inférieures à $\frac{1}{4}$; en effet, le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{(n-i)\ldots(n-2i-1)}{1.2.3\ldots i+1}x^{i+1} : \frac{(n-i+1)\ldots(n-2i+1)}{1.2.3\ldots i}x^i$$

ou

$$\frac{(n-2i-1)(n-2i)}{(n-i+1)(i+1)}x,$$

c'est-à-dire $4x$ pour $i=\infty$. Nous supposerons donc mod. $x<\frac{1}{4}$, et alors, pour trouver la valeur de la série (8), nous la comparerons avec la formule (4). Si l'on différentie cette formule et si l'on divise les deux membres par k, il vient

$$(9)\quad \frac{1}{k}\frac{d}{dx}\psi^k(x) = 1 + \frac{k-3}{1}x + \frac{(k-4)(k-5)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

En faisant

$$k-3=n \quad \text{ou} \quad k=n+3,$$

on trouve pour second membre la série (8), et par conséquent on a

$$(10)\qquad f(x) = \frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\psi^{n+3}(x).$$

Expression de u_n à l'aide de la fonction ψ ou φ.

Si dans la formule (8) on suppose n entier, on peut la mettre sous la forme suivante

$$f(x) = u_n + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n+2)}{1.2.3\ldots(n+2)}x^{n+2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = u_n + (-x)^{n+2} \\ \times\Big[1 + \frac{n+4}{1}(-x) + \frac{(n+5)(n+6)}{1.2}(-x)^2 \\ + \frac{(n+6)(n+7)(n+8)}{1.2.3}(-x)^3 - \ldots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Or, si dans la formule (9) on fait

$$k = -n - 1,$$

on trouve

$$-\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\psi^{-(n+1)}(x) = 1 + \frac{n+4}{1}(-x) + \frac{(n+5)(n+6)}{1.2}(-x)^2 + \ldots,$$

et la formule (11) devient alors

$$f(x) = u_n - (-x)^{n+2}\frac{d}{dx}\frac{\psi^{-(n+1)}(x)}{n+1},$$

ou, remplaçant $f(x)$ par sa valeur tirée de (10),

$$\frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\psi^{n+3}(x) = u_n - (-x)^{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\frac{\psi^{-(n+1)}(x)}{n+1}.$$

Tirons de cette équation la valeur de u_n et remplaçons ψ par sa valeur (4), il vient

$$u_n = \frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+3} + \frac{(-x)^{n+2}}{n+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4x}}\right)^{n+1}$$

ou bien encore

$$u_n = \frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+3} + \frac{(-x)^{n+2}}{n+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}\right)^{n+1}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, on trouve, réductions faites,

$$(12)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} - (-1)^{n+2}\left(\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^{n+2}\right] \\ \text{ou} \\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\psi^{n+2}(x) - (-1)^{n+2}\varphi^{n+2}(x)\right]. \end{cases}$$

Cette équation montre que u_n s'exprime rationnellement à l'aide de la valeur de la fraction (1); de plus, on voit que u_n est une fonction rationnelle des racines de l'équation (2).

Résolution de $u_n = 0$.

La formule (12) a été établie dans l'hypothèse

$$\text{mod. } x < 4,$$

mais elle est générale, car ses deux membres sont deux polynômes égaux pour des valeurs de x en nombre supérieur à leur degré.

Cette formule (12) peut servir à la résolution de l'équation

$$u_n = 0.$$

En effet, d'après la formule en question, l'équation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2};$$

mais comme nous avons multiplié par $\sqrt{1+4x}$, la racine $x = -\frac{1}{4}$ devra être rejetée, et l'on aura

$$1+\sqrt{1+4x} = \alpha - \alpha\sqrt{1+4x},$$

α désignant une racine de l'équation binôme

$$\alpha^{n+2} = 1$$

différente de l'unité. On en déduit

$$\sqrt{1+4x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1},$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} - 1\right)\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + 1\right)$$

ou

$$x = \frac{-\alpha}{(\alpha + 1)^2} = \frac{-1}{\frac{1}{\alpha} + \alpha + 2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant α par sa valeur

$$\cos\frac{2k\pi}{n+2} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n+2},$$

$$x = \frac{-1}{4\cos^2\frac{k\pi}{n+2}},$$

Discussion des racines de l'équation $u_n = 0$.

L'équation $u_n = 0$ est donc du nombre de celles que l'on peut résoudre par radicaux, et en effet les racines sont exprimables rationnellement les unes à l'aide des autres.

La formule

$$x = \frac{-1}{4\cos^2\frac{k\pi}{n+2}},$$

à laquelle nous venons d'arriver, est beaucoup trop générale; ainsi, pour $n = 0$, elle nous fournit deux valeurs pour x, tandis que $u_0 = 0$ n'admet pas de racines: cela tient à l'évanouissement du radical $\sqrt{1+4x}$, cependant

cette formule nous donnera toutes les solutions de $u_n = 0$, et seulement celles-là si l'on assujettit l'argument du cosinus à rester compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire, en observant que le terme indépendant de x dans u_n est 1,

$$u_n = x^k \left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{2\pi}{n+2}\right) \times \left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{3\pi}{n+2}\right)\cdots,$$

k désignant le degré de la fonction u_n.

Relations entre les coefficients et les racines.

Les relations entre les coefficients et les racines de l'équation $u_n = 0$ conduisent à des formules diverses parmi lesquelles on distingue les suivantes :

$$n = 4\left(\cos^2\frac{\pi}{n+2} + \cos^2\frac{2\pi}{n+2} + \ldots\right),$$

$$4\cos^2\frac{\pi}{n+2} \times 4\cos^2\frac{2\pi}{n+2} \times \ldots = 1 \text{ ou un nombre figuré.}$$

On peut écrire ces deux relations ainsi qu'il suit :

$$\frac{n}{8} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \cos^2\frac{k\pi}{n+2},$$

$$\prod_{k=1}^{k=n+1} 2\cos\frac{k\pi}{n+2} = 1 \text{ ou un nombre figuré,}$$

abstraction faite dans la seconde formule des valeurs de k qui pourraient annuler le produit $\prod$.

Réduction de la fraction (1) *en série.*

En général, quand on veut transformer en série une fraction continue de la forme

$$z = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}},$$

on a recours à la formule d'Euler,

$$z = \frac{a_1}{Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_2} - \ldots \pm \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \mp \ldots$$

On sait en outre que la série précédente converge ou diverge en même temps que la fraction dont elle est le développement, et que Q_n est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite (ainsi $Q_1 = b_1$).

Si nous supposons

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = x, \quad b_1 = b_2 = \ldots = 1,$$

il vient [*voir* les équations (1), (2) et (3)]

$$(13)\quad \varphi(x) = \frac{x}{u_0} - \frac{x^2}{u_0 u_1} + \frac{x^3}{u_1 u_2} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{u_{n-1} u_n} \mp \ldots$$

Cette série sera convergente si

$$\text{mod.} \sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{u_{n-1} u_n}} < \alpha < 1$$

ou, ce qui revient au même, si

$$(14)\qquad \text{lim. mod. } x \frac{1}{\sqrt[n]{u_{n-1} u_n}} < 1.$$

Or, le produit $u_{n-1} u_n$ se compose de n ou $n-1$ facteurs

binômes de la forme

$$1 + 4x \cos^2 \frac{p\pi}{q};$$

en désignant alors par $1 + 4x \cos^2 \omega$ celui de ces facteurs qui a le plus petit module, le premier membre de la formule (14) aura un module inférieur à

$$\text{mod. lim. } \frac{x}{1 + 4x \cos^2 \omega}.$$

La limite de cette expression est x pour les valeurs positives de cette variable, en sorte que l'on peut en conclure la convergence de la série (13) pour $x < 1$. Mettons l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\, u_n}}$$

sous la forme

$$\sqrt{\sqrt[n]{\frac{x^{2(n+1)}}{\mathrm{U} + \mathrm{V}}}}. \tag{15}$$

U dans cette formule désignera le produit de n facteurs de la forme

$$1 + 4x \cos^2 \theta,$$

θ étant moindre que $\frac{\pi}{4}$; V contiendra les autres facteurs. La limite de l'expression (15) prend alors une valeur dont le module est inférieur à

$$\text{mod. } \sqrt{\frac{x}{1 + 4x \cos^2 t}} \sqrt{\frac{x}{1 + 4x \cos^2 \omega}},$$

t désignant un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et ω un arc compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La discussion de cette formule permettra de reconnaître dans les différents cas la convergence de la sé-

rie (13) et par suite de la fraction continue lorsque x ne sera pas positif.

Nous pouvons ainsi écrire, au lieu de (13),

$$\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1+x} + \frac{x^3}{(1+x)(1+2x)} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\, u_n},$$

formule dans laquelle on peut aussi remplacer

$$\frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\, u_n}$$

par

$$\frac{x}{\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right) \\ \times\left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{2\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots \end{array}\right\}}$$

Si l'on pose alors

$$\frac{1}{x} = z,$$

il vient

$$\frac{-z+\sqrt{z^2+4z}}{2} = 1 - \frac{1}{z+1} + \ldots \pm \frac{1}{\left(z+4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(z+4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\cdots} \mp \cdots,$$

et cette formule aura lieu pour toutes les valeurs positives de z, et en général pour toutes les valeurs de z pour lesquelles le second membre sera convergent.

SUR UN CERTAIN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. PAINVIN.

1. Dans l'avant-dernier numéro des *Nouvelles Annales* (année 1866, p. 444), M. Le Besgue a repris, par une autre méthode, la question que j'avais traitée p. 481, année 1864, savoir : la détermination du lieu des foyers des sections centrales, dans une surface du second ordre. M. Le Besgue arrive à une équation qui diffère de celle que j'ai trouvée par le double signe du second membre, et il termine (p. 449, 1866) en se demandant s'il faut toujours prendre le signe supérieur.

Le principe qui a servi de point de départ à mon analyse (p. 481, année 1864) déterminant tous les foyers, le calcul se développant naturellement sans introduire ni supprimer de solution, je dois en conclure *à priori* que l'équation du lieu cherché ne peut pas renfermer de double signe. Mais il est bon de rechercher la cause de la divergence signalée.

Si nous nous arrêtons au premier alinéa de la page 446 (année 1866), nous conclurons avec M. Le Besgue que les foyers de la section faite par le plan

$$mx + ny + pz = 0$$

sont déterminés par les trois équations

$$\text{(I)} \qquad mx + ny + pz = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad m\alpha yz + n\beta zx + p\gamma xy = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 4LN}}{L}.$$

Regardant pour un instant m, n, p comme des quantités connues, nous voyons d'abord que le plan (I) coupe le cône (II) suivant deux droites rectangulaires qui sont les axes de la section ; chacune de ces droites rencontre en deux points chacune des deux sphères représentées par l'équation (III). Ainsi, en déterminant les foyers à l'aide des équations précédentes, on arrive à cette conclusion inadmissible que la section faite par le plan considéré possède huit foyers. Recherchons donc d'une manière plus précise la véritable signification de ce groupe d'équations.

Rappelons-nous que le carré de la distance d'un foyer au centre est égal au carré du demi-axe sur lequel se trouve ce foyer, moins le carré de l'autre demi-axe (il s'agit toujours de la valeur algébrique des carrés des axes) ; cette différence, prise en sens contraire, donne le carré de la distance du foyer situé sur l'autre axe. Or, si nous considérons *une* des droites définies par les équations (I) et (II), cette droite rencontre les sphères (III) en quatre points ; deux de ces points sont les foyers situés sur l'axe considéré ; les deux autres points d'intersection ne sont pas des foyers, mais leur distance (réelle ou imaginaire) au centre est égale à la distance à ce même centre des foyers situés sur l'*autre* axe de la section. Cette ambiguïté que présentent les équations (I), (II), (III) persiste jusqu'à la fin du calcul, p. 446, 447, 448 ; et l'équation (a), p. 448, à laquelle M. Le Besgue se trouve conduit, résout cette double question :

1° Trouver le lieu des foyers des sections centrales.

2° Sur *un* des axes de la section on prend un point à une distance du centre égale à celle du foyer qui se trouve sur l'*autre* axe : trouver le lieu de ces points.

La méthode indiquée à la page 444 présente donc le grave inconvénient de mêler ces deux questions. Peut-on

faire disparaître cette ambiguïté sans détruire l'élégante analyse de M. Le Besgue? C'est un point que je n'ai pas examiné. D'ailleurs, on vérifie très-aisément que les coordonnées des foyers des sections passant par les axes de la surface ne satisfont pas à l'équation (a), p. 448, lorsqu'on prend le signe — dans le second membre.

2. Je ferai des mêmes remarques sur la question de la page 161, année 1865. M. Le Besgue termine cet article en disant : « Il serait bon d'examiner si la définition du foyer (un cercle de rayon nul.....) peut donner les deux signes. »

Je répondrai à cela que, dans la question posée, le double signe ne doit pas exister.

Reprenons, en effet, les deux relations

$$\text{(I)}\quad 2(C\cos\theta - B)t - (A - C) = \pm\sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2},$$

$$\text{(II)}\quad r^2 = \frac{A + C - 2B\cos\theta \pm \sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2}}{2(AC - B^2)},$$

qui se trouvent, la première au haut de la page 162, année 1865, la deuxième au haut de la page 163.

Je remarque d'abord que les signes + et — doivent se correspondre dans ces deux égalités; on le constate en cherchant la longueur de l'axe correspondant à une des valeurs de t. Or, le carré de la distance d'un foyer au centre est égal au carré du demi-axe sur lequel se trouve ce foyer, moins le carré de l'autre demi-axe. Donc, si le foyer considéré se trouve sur l'axe dont la direction t correspond au signe + du radical, le carré de sa distance au centre contiendra également ce radical avec le signe + ; la même conclusion a lieu pour le signe —. Il résulte de là que l'équation (7), p. 163, obtenue par M. Le Besgue, ne doit pas présenter un double signe.

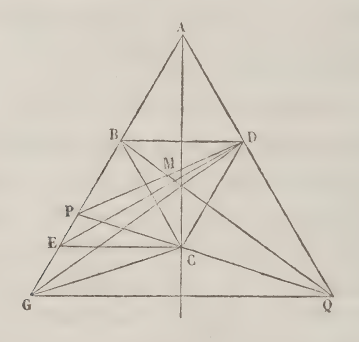
CONCOURS GÉNÉRAL (1866).

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

SOLUTION PAR M. DE GROSSOUVRES,
Élève du collége Stanislas (classe de M. Prouhet).

Étant donné un losange ABCD *dans lequel la diagonale* BD *est égale à chaque côté, on mène par le sommet* C *une droite* PQ *qui rencontre en* P *et* Q *respectivement les côtés* AB *et* AD; *on mène enfin les droites* PD *et* QB *qui se coupent au point* M. *Cela posé, on demande de trouver le lieu du point* M *quand la droite* PQ *tourne autour du sommet* C.

Je prends le point G symétrique du point Q par rapport à AC; les deux droites PQ, CG, symétriques par



rapport à l'axe AC, sont également inclinées sur cet axe; par conséquent la droite CE perpendiculaire sur l'axe est bissectrice de l'angle PCG formé par ces deux droites, et puisque CA est perpendiculaire sur CE, le point A est le conjugué harmonique du point E, par

rapport au segment PG; donc le faisceau qui a pour sommet le point D et dont les rayons passent par les points A, P, E, G est un faisceau harmonique. Or DE, diagonale du losange BDCE, est perpendiculaire sur l'autre diagonale BC, et par suite sur la droite AD qui lui est parallèle. Les deux rayons DA, DE, conjugués harmoniques par rapport aux rayons DP, DG, étant perpendiculaires l'un sur l'autre, il résulte d'un théorème connu que la droite DE est bissectrice de l'angle PDG, et comme en outre cette droite DE est la bissectrice de l'angle BDC, il s'ensuit que les angles BDP, CDG sont égaux. Les deux droites CD, DG étant respectivement symétriques des droites CB, BQ par rapport à l'axe AC, les angles CDG, CBQ formés par ces droites sont égaux, et comme les angles CDG, BDP sont égaux, il en résulte que les angles CBQ, BDP sont égaux; donc, dans le triangle MDB, la somme des angles MBD, MDB est égale à la somme des angles MBD, MBC, c'est-à-dire à l'angle CBD, ou, ce qui est la même chose, à l'angle BAD, puisque les triangles ADB, CBD sont équilatéraux; donc l'angle BMD, qui est le supplément de la somme des angles MBD, MDB, est le supplément de l'angle BAD; par conséquent le quadrilatère ABMD est inscriptible.

Donc *le lieu géométrique du point* M *est le cercle circonscrit au triangle* ABD.

N. B. — On nous dit, mais nous avons peine à le croire, que cette copie a été écartée par une fin de non-recevoir, comme ne s'appuyant pas sur *une méthode classique*. Cela nous surprend d'autant plus qu'il y a nombre d'années que tous les professeurs enseignent les propriétés de la division harmonique et des faisceaux harmoniques, en sorte qu'il y a bien peu d'élèves qui ne les connaissent. Écarterait-on une copie où l'on s'appuierait sur la théorie des transversales? Cependant il n'y a rien de plus classique, quoique les programmes n'en parlent pas.

En 1851, une Commission où entraient plusieurs Membres de l'Institut, et entre autres l'illustre Cauchy, avait à juger les compositions du concours général en Mathématiques spéciales. L'une de ces compositions,

celle de M. Camille de Polignac, s'appuyait sur des méthodes qui n'étaient certainement pas classiques, puisqu'elles n'avaient encore été exposées dans aucun ouvrage *ex professo*. Les juges du concours avouèrent d'une commune voix qu'ils n'y comprenaient rien, mais ils ne voulurent pas que leur ignorance nuisît à un candidat qui paraissait sérieux. Ils firent venir parmi eux l'auteur de ces méthodes et, sur son rapport, M. de Polignac eut le second prix. Je rapporte le fait parce qu'il est curieux, sans vouloir d'ailleurs établir de comparaison entre la Commission de 1851 et celle de 1866, dont tous les membres, je le suppose, connaissent les propriétés des faisceaux harmoniques. P.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SECTIONS CONIQUES;

Par M. Ar. VIANT,
Au Prytanée militaire.

Trois droites AA', BB', CC', *issues des trois sommets d'un triangle* ABC, *se coupent en un même point* O'; *une conique passant par les pieds* A', B', C' *de ces droites coupe les côtés en trois autres points* A'', B'', C'', *qui, joints aux sommets opposés, donnent un nouveau faisceau de droites concourantes en un même point* O''.

La proposition est facile à établir dans le cas du cercle. Par une projection conique on l'étend ensuite au cas d'une conique quelconque.

Par hypothèse,

$$\frac{AB'.CA'.BC'}{CB'.AC'.BC''}=1.$$

Par construction, on a

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{AC''}{AB''},\quad \frac{CA'}{CB'}=\frac{CB''}{CA''},\quad \frac{BC'}{BA'}=\frac{BA''}{BC''};$$

donc

$$\frac{AC''.CB''.BA''}{AB''.CA''.BC''}=1;$$

par conséquent, les droites AA'', BB'', CC'' se coupent au même point (*).

En transformant par les polaires réciproques, on obtient l'énoncé suivant :

Trois droites issues des sommets d'un triangle vont couper les côtés opposés en trois points en ligne droite; on leur inscrit une conique à laquelle on mène des sommets du triangle trois nouvelles tangentes. On forme ainsi un nouveau faisceau de lignes coupant les côtés opposés du triangle en ligne droite.

THÉORÈME SUR LES CONIQUES;

Par MM. Max CORNU et E. MORANGE.

On sait que lorsque trois coniques S, S', S'' ont deux points communs A et B, les trois droites qui joignent les autres points d'intersection de ces courbes deux à deux concourent en un même point P. Je dis qu'il existe une conique passant par les deux points A et B, tangente en chacun de ces points aux deux droites PA et PB, et coupant une quelconque S des coniques en ses points d'intersection avec la polaire de P par rapport à S.

Je prends le triangle PAB pour triangle de référence.

(*) La proposition énoncée se déduit immédiatement du théorème de Carnot, quelle que soit la conique considérée. Car, d'après ce théorème, on a, pour toute courbe du second degré,

$$\frac{AC''.CB''.BA''}{AB''.CA''.BC''} = \frac{AB'.CA'.BC'}{CB'.AC'.BA'}.$$

G.

Les équations des trois coniques seront de la forme

$$(S)\qquad YZ + X(lX + m\,Y + n\,Z) = 0,$$
$$(S')\qquad YZ + X(lX + m'\,Y + n'\,Z) = 0,$$
$$(S'')\qquad YZ + X(lX + m''Y + n''Z) = 0.$$

L'équation d'une conique tangente à PA en A, à PB en B, est

$$YZ + \lambda X^2 = 0.$$

Cherchons la seconde corde commune à cette courbe et à la conique S : elle aura pour équation

$$(l - \lambda)X + mY + nZ = 0.$$

L'équation de la polaire de P par rapport à la conique S est

$$2lX + mY + nZ = 0.$$

On voit qu'on peut choisir λ de manière à identifier les équations de ces deux droites; il suffit de prendre $\lambda = -l$. Le théorème se trouve donc établi.

BIBLIOGRAPHIE.

XXII.

Resal (H.), Ingénieur au corps impérial des Mines. — *Traité élémentaire de Mécanique céleste.* 1 vol. in-8 de xvi-464 pages et 1 planche. Paris, 1865; Gauthier-Villars, éditeur. — Prix : 8 francs.

M. Resal s'est proposé, dans cet Ouvrage, de présenter les principes de l'Astronomie mathématique sous une forme assez simple pour les faire entrer dans le cadre de l'enseignement supérieur. Il a écrit ainsi une élégante introduction à la Mé-

canique céleste, et il a rendu un véritable service aux jeunes gens qui sortent chaque année de l'École Polytechnique ou de nos Facultés avec une forte instruction et avec le goût du travail.

Trois problèmes fondamentaux forment, comme on sait, l'objet de la Mécanique céleste : ce sont les perturbations planétaires, la figure des corps célestes et les oscillations des fluides qui les recouvrent, la rotation de ces corps autour de leurs centres de gravité. De ces trois problèmes, le second est celui que M. Resal a traité avec le plus de développements, et, à notre avis, avec le plus de succès. La convergence des séries de fonctions sphériques qui expriment l'attraction d'un sphéroïde sur un point, et la détermination de la forme de ces fonctions; l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, et la discussion relative aux conditions de possibilité de cet ellipsoïde; le théorème de M. Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, et l'application de ce théorème à la stabilité de l'équilibre des mers; enfin les propriétés des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde : tels sont les points qui ont principalement attiré notre attention. Il nous est impossible d'indiquer ici les méthodes souvent originales et toujours bien choisies que l'Auteur a employées pour traiter ces différentes questions. Nous nous bornerons à le féliciter de l'excellente habitude qu'il a prise d'illustrer en quelque sorte les résultats de l'analyse par des considérations empruntées à la Géométrie et à la Cinématique. L'Auteur a complété la théorie de la figure de la Terre par deux Chapitres intéressants, l'un sur la chaleur centrale de notre globe, l'autre sur l'équilibre d'élasticité d'une croûte planétaire. Ces deux Chapitres constituent la partie mathématique de la Géologie, et c'est une heureuse idée que de les avoir introduits dans un Cours de Mécanique céleste.

Nous féliciterons encore M. Resal d'avoir analysé et coordonné les beaux travaux de M. Roche sur les atmosphères des corps célestes en général et sur celles des comètes en particulier. C'est une question que les recherches entreprises par

M. Faye, à propos de la comète de Donati, ont mise à l'ordre du jour. L'existence d'une force répulsive émanée du Soleil et agissant sur la matière extrêmement divisée en raison inverse de sa densité paraît aujourd'hui hors de contestation, et M. Roche a fait voir qu'en joignant cette force hypothétique à la gravitation, l'on rend parfaitement compte des queues et des aigrettes. Les figures géométriques résultant de la théorie peuvent être considérées comme les esquisses des formes observées. A la vérité, M. Roche n'a considéré les atmosphères qu'en équilibre, tandis qu'elles sont continuellement en mouvement; il a supposé (à peu près comme l'avait fait Newton dans sa théorie des marées) que l'atmosphère d'une comète prend à chaque instant la figure qu'elle aurait si le noyau était immobile, tandis qu'en réalité cette atmosphère tend continuellement vers une figure d'équilibre qui varie sans cesse et que par conséquent elle n'atteint jamais; il n'a donné que la théorie statique des phénomènes. Mais une théorie dynamique soulèverait peut-être des difficultés d'analyse insurmontables, et, en tous cas, n'aurait d'intérêt qu'autant que les observations acquerraient assez de précision ponr qu'on pût les comparer aux résultats du calcul, non pas en gros, mais en détail : nous n'en sommes pas là.

On voit que le livre de M. Resal n'est pas seulement une Introduction au grand ouvrage de Laplace, mais qu'il en est sur plusieurs points l'utile complément. Toutefois, nous ne pouvons nous dispenser de faire observer à l'Auteur que les différentes parties de son livre manquent un peu de proportion, et que le Chapitre consacré aux perturbations planétaires n'est peut-être pas suffisant, même pour un Cours élémentaire. Sans doute la méthode de la variation des constantes arbitraires, la réduction en série de la fonction perturbatrice, la théorie des variations séculaires des éléments elliptiques des planètes sont présentées avec autant d'élégance que de simplicité, et l'Auteur a complété heureusement ce Chapitre par une Note intéressante sur le beau théorème d'Hamilton et de Jacobi. Mais il ne nous paraît pas permis, même dans un Cours élémentaire, de passer entièrement

sous silence les inégalités séculaires et les principales inégalités périodiques de la Lune, la libration des trois premiers satellites de Jupiter, la grande inégalité de Vénus, la découverte de Neptune par les perturbations d'Uranus, les travaux de M. Le Verrier sur Mars et sur Mercure. Ce sont des lacunes que M. Resal, nous l'espérons, fera disparaître dans une seconde édition. S'il craignait de trop grossir son volume, nous l'engagerions plutôt à sacrifier tout ce qui concerne le mouvement elliptique et l'attraction des ellipsoïdes. Le lecteur qui aborde un livre comme celui-ci doit être familiarisé d'avance avec toutes les théories qui s'enseignent dans les Cours ordinaires de Mécanique rationnelle. CH. SIMON.

RECTIFICATIONS.

M. Ferdinand Roux, élève du lycée de Nîmes (classe de M. Durrande), nous avertit que le théorème qui fait l'objet de la question 741 (2e série, t. VI, p. 429) est faux. On le prouve aisément à l'aide d'un cas particulier.

Il s'est glissé une erreur dans la question 781, p. 480. L'énoncé a été rectifié par M. Laisant, dont la solution paraîtra dans le prochain numéro.

La démonstration de la série de Taylor, donnée au tome II de la 2e série, p. 19, doit être entièrement rejetée, l'auteur raisonnant comme si la quantité désignée par θ était une constante, tandis qu'elle dépend à la fois de h et de x.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME V, 2e SÉRIE.)

Analyse.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Bulletin bibliographique (*).

(*) Tous les comptes rendus non signés sont de M. Prouhet.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

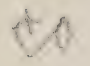
(TOME V, 2e SÉRIE.)

Note. — Sur 152 collaborateurs dont les travaux ont été insérés ou mentionnés, il y a 39 élèves de Mathématiques spéciales, dont 16 ont été admis à l'École Polytechnique, et 1 à l'École Normale.

ERRATA.

TOME V (2ᵉ SÉRIE).

Page 177, ligne 23, *au lieu de* homofocale, *lisez* homofocaux.
Page 234, ligne 22, *au lieu de* la somme des carrés, *lisez* la somme des inverses des carrés.
Page 252, *ajoutez à la fin de la note* ou zéro.
Page 253, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $(m_2 + \ldots)$, *lisez* $(m^2 + \ldots)$.
Page 253, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $(n_2 + \ldots)$, *lisez* $(n^2 + \ldots)$.
Page 256, ligne 12, *au lieu de* ν'', *lisez* ν'.
Page 258, ligne 5, *au lieu de* $\frac{m_1(m_1-2)}{2}$, *lisez* $\frac{m_1(m_1-1)}{2}$.
Page 259, ligne 7, *au lieu de* $d_1 = 1$, *lisez* $d_1 = 0$.
Page 290, ligne 3, *au lieu de* qui, *lisez* que.
Page 292, ligne 5, *au lieu de* le dernier, *lisez* $(C_{m,n}\theta, Z_1 Z_2)$.
Page 292, ligne 6 en remontant, *au lieu de* nº 12, *lisez* nº 10.
Page 297, dans la note, *au lieu de* nº 20, *lisez* nº 18.
Page 362, ligne 11, *au lieu de* Tubrun, *lisez* Aubrun.
Page 527, ligne 23, *au lieu de* derniers, *lisez* premiers.



QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les cinq derniers volumes de la première série et dans les cinq premiers de la deuxième.

TOME XVI, 1re série.

Nos	Pages.
360	58
383 et 385	180
399 et 400	390

TOME XVII.

Nos	Pages.
414 et 424	31
434, 437, 439 et 441	186
444 et 445	262
447 et 448	358
454	434

TOME XVIII.

Nos	Pages.
473 et 475	170
480 et 482	266
487 et 489	357
495 et 496	443

TOME XIX.

Nos	Pages.
505 et 506, 511 à 513	44
525 et 526	234
528 et 529	247
536, 538 et 539	306
541	361
546, 547, 549 et 552	404
554	464

TOME XX.

Nos	Pages.
559	55
573	112
578, 585 et 589	140
592 et 593	216
598	399

TOME Ier, 2e série.

Nos	Pages.
604, 606 et 607	29
615 et 617	155
631	383

TOME II.

Nos	Pages.
643	93
662	336
666	371
673 et 675	479
683	550

TOME III.

Nos	Pages.
693	139
701, 703 et 705	176
711-II et III	442

TOME IV.

Nos	Pages.
718	48
721	86
724	141
729 à 732	142
744, 745 et 748	428

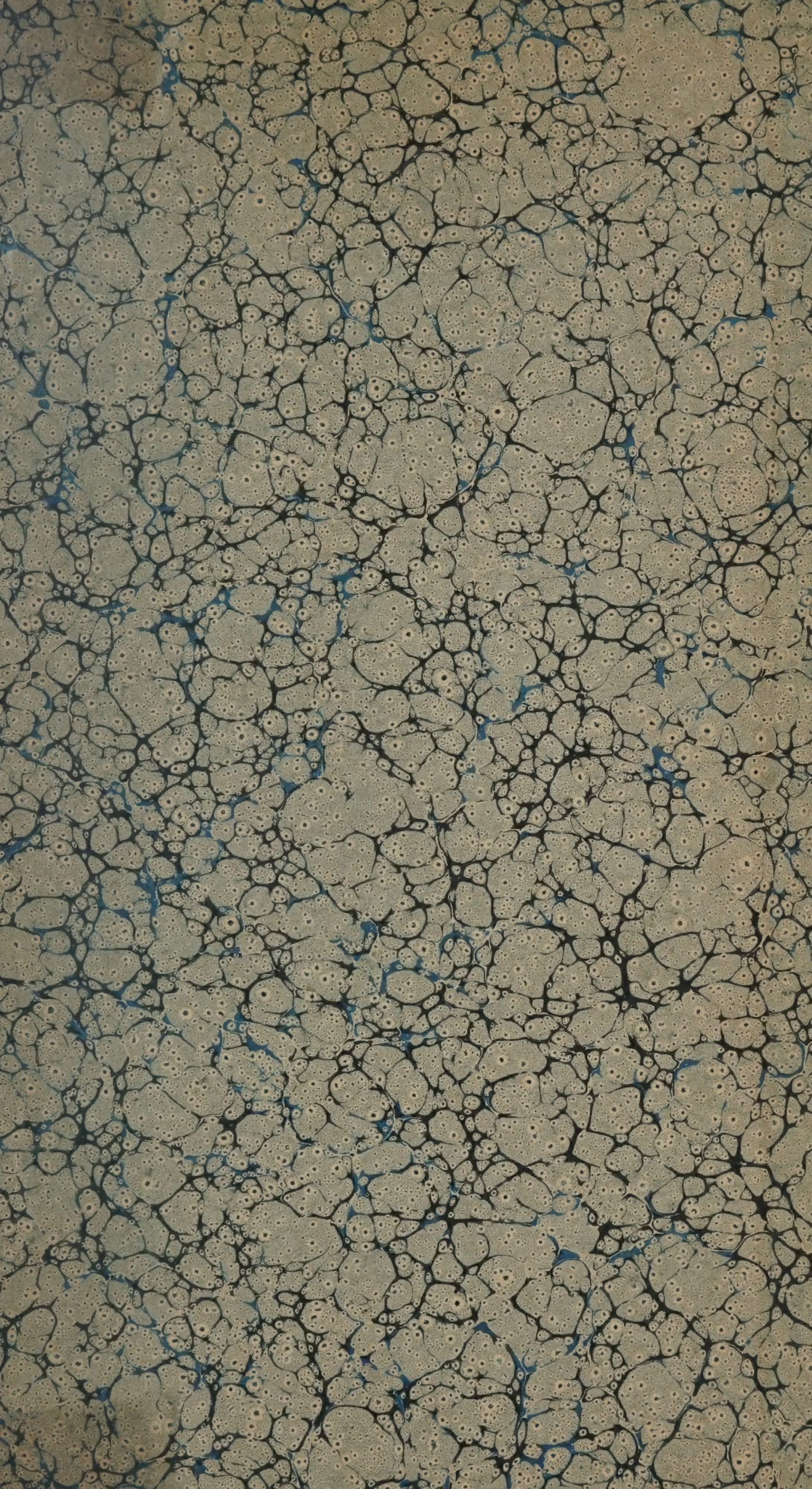
TOME V.

Nos	Pages.
751	48
758 et 759	191
760 et 761	240
762, 763 et 765	336
767 à 774	382
778 à 787	479
788 à 790	528

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.








UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5NO C001
NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES
25 1866
3 0112 016827856